https://doi.org/10.26552/com.C.2000.4.29-34

KOMUNIKÁCIE COMMUNICATIONS

Štefan Peško *

PYRAMIDOVÁ METÓDA PRE ÚLOHU OBCHODNÉHO CESTUJÚCEHO

THE PYRAMIDAL METHOD FOR TRAVELING SALESMAN PROBLEM

Najkratší pyramidový cyklus (SPT) je dobre riešiteľný prípad úlohy obchodného cestujúceho (TSP), keď matica vzdialeností je Mongeho matica. Študuje sa heuristika pre maticu vzdialeností bez obmedzení, ktorá vychádza z opakovaného použitia metódy pre SPT. Nová procedúra pre výpočet SPT je založená na hľadaní najlacnejšej cesty v sieti. Dobré výsledky stochastickej verzie demonštrovanej metódy sa prezentujú už na riešených Euklidovských inštanciách TSP.

1 Úvod

V tomto príspevku budeme používať terminológiu zavedenú Burkadom a Deinkom [1]. *Úlohu obchodného cetsujúceho* (TSP) môžno formulovať jednoducho a presne takto: Je daná $n \times n$ matica vzdialeností $C = (c_{ij})$, hľadá sa cyklická permutácia π množiny $N = \{1, 2, \ldots\}$ ng minimalizujúca funkciu

$$c(\pi) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,\pi}(i)\,. \qquad (1)$$

Množinu celých čísel budeme značiť Z a budeme predpokladať, bez straty všeobecnosti, že $c_{ij} \in Z$. Budeme používať zátvorky $\langle\rangle$ na rozlíšenie reprezentácie cyklickej permutácie v tvare $\pi = \langle 1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \ldots\rangle$ vzhľadom na alternatívnu reprezentáciu $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$. Je známe, že úloha TSP je *NP*-ťažký problém. Viac informácií možno nájsť v monografii Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan a Shomoys [2]. Niektoré špeciálne prípady úloh TSP sú riešiteľné v polynomiálnom čase vzhľadom na špeciálnu kombinatorickú štruktúru matice vzdialeností (kapitola 4 v [2]). Mezi nimi je úloha TSP s Mongeho maticou.

2 Mongeho matica

Matica $C = (c_{ij})$ typu $n \times n$ sa nazýva *Mongeho matica,* ak spĺňa nasledujúce podmienky pre všetky indexy $i, j, k, l \in N$ také, že pre $i < k$ a $j < l$

$$c_{i,j} + c_{k,l} \leq c_{i,l} + c_{k,j}\,. \qquad (2)$$

F. Supnik [3] ukázal, že $\langle 1, 3, 5, \ldots, 6, 4, 2\rangle$ je riešením úlohy TSP so symetrickou Mongeho maticou. Na charakteristiku opti-

A shortest pyramidal tour (SPT) is a well-solved case of TSP when a distance matrix is the Monge matrix. We study heuristic repeating method for SPT with the distance matrix without restriction. A new procedure for computing SPT is based on a shortest path in the network. Good results for solved the Euclidean TSP instances with the stochastic version of the demonstrated method are presented.

1 Introduction

In this paper we will use the terminology from Burkad and Deinko [1]. The *traveling salesman problem* (TSP) can be stated clearly and exactly in simple terms: Given an $n \times n$ distance matrix $C = (c_{ij})$, find a cyclic permutation π of the set $N = \{1, 2, \ldots\}$ ng that minimize the function

$$c(\pi) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,\pi}(i)\,. \qquad (1)$$

We will note Z the set of integer numbers and presuppose without loss of generality that $c_{ij} \in Z$. We use brackets $\langle\rangle$ to distinguish the cyclic representation of a permutation in the form $\pi = \langle 1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \ldots\rangle$ from the alternative representation $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$. The TSP is known to be *NP* hard. For more information refer to Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan and Shomoys [2]. Several special cases of the TSP are solvable in polynomial time, due to special combinatorial structures of the distance matrix, see the chapter 4 in [2]. Among them is TSP with a Monge matrix.

2 Monge matrix

An $n \times n$ matrix $C = (c_{ij})$ is called a Monge matrix if it satisfies the following conditions for all indices $i, j, k, l \in N$ with $i < k$ and $j < l$:

$$c_{i,j} + c_{k,l} \leq c_{i,l} + c_{k,j}\,. \qquad (2)$$

Supnik [3] showed that the TSP with a symmetric Monge matrix is solved by the tour $\langle 1, 3, 5, \ldots, 6, 4, 2\rangle$. In order to cha-

* **RNDr. Štefan Peško, CSc.**
Faculty of Management Science and Informatics, University of Žilina, Slovak Republic

málneho riešenia úloh TSP s asymetrickými Mongeho maticami potreboval koncepciu *pyramidového cyklu*, t. j. permutácie π v tvare

$$\pi = \langle 1, i_1, i_2, \ldots, i_r, n, j_1, j_2, \ldots j_{n-r-2} \rangle, \tag{3}$$

kde $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ a $j_1 > j_2 > \ldots > j_{n-r-2}$. Úloha TSP zúžená na triedu matíc sa nazýva *pyramidovo riešiteľná*, ak pre ľubovoľnú maticu tejto triedy existuje optimálny pyramidový cyklus. Zatiaľ čo počet pyramidových cyklov s n mestami je exponenciálny k n, najkratší pyramidový cyklus môžno nájsť pomocou dynamického programovania v čase $O(n^2)$. Viacerí autori [2], [4] ukázali, že úlohy TSP, ktoré sú zúžené na asymetrické Mongeho matice, sú pyramidovo riešiteľné.

Kombinatorická štruktúra matice vzdialeností závisí od očíslovania jej riadkov a stĺpcov. Matica $C = (c_{ij})$ sa nazýva *permutovaná Mongeho* matica, ak existuje taká permutácia φ jej riadkov a stĺpcov, že permutovaná matica $C_\varphi = (c_{\varphi(i)\varphi(j)})$ je Mongeho matica. Permutovaná Mongeho matica môže byť identifikovaná [4] v čase $O(n^2)$.

R. E. Burkad a V. G. Deinko [1] zaviedli relaxáciu Mongeho podmienky (2). Matica $C = (c_{ij})$ typu $n \times n$ sa nazýva *relaxovaná Mongeho* matica (RM-matica), ak spĺňa nasledujúce podmienky pre všetky indexy $i, i+1, j, j+1, l \in N$ také, že pre $i + 1 < j \neq l$:

$$c_{i,i+1} + c_{jl} \leq c_{il} + c_{j,i+1} \tag{4}$$

$$c_{i+1,i} + c_{jl} \leq c_{i+1,l} + c_{ji} \tag{5}$$

Poznamenajme, že diagonálne prvky matice C nie sú zahrnuté v definícii relaxovanej Mongeho matice a môžu ostať naďalej nešpecifikované. Autori ukázali, že úloha TSP, zúžená na symetrické RM-matice, je pyramidovo riešiteľná. Je ukázané, že systém (4)-(5) je ekvivalentný so systémom s $O(n^2)$ nerovnosťami, takže úloha TSP s permutovanou RM-maticou je identifikovateľná a riešiteľná v čase $O(n^2)$.

3 Najkratší pyramidový cyklus

Ukážeme, že najkratší pyramidový cyklus možno hľadať ako najlacnejšiu cestu v špeciálne konštruovanej sieti v čase $O(n^2)$.

Asymetrická úloha TSP sa v teórii grafov formuluje nasledovne. Je daný ohodnotený úplný digraf $K = (\overrightarrow{K}_n, c)$, hľadá sa naj-

racterize optimal solution of the TSP with asymmetric Monge matrices one needs the concept of *pyramidal tour*, i.e. permutation π with

$$\pi = \langle 1, i_1, i_2, \ldots, i_r, n, j_1, j_2, \ldots j_{n-r-2} \rangle, \tag{3}$$

where $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ and $j_1 > j_2 > \ldots > j_{n-r-2}$. The TSP restricted to a class of matrices is called *pyramidal solvable* if for every matrix in this class there is an optimal tour that is pyramidal. Although the number of pyramidal tours on n cities is exponential in n a minimum cost pyramidal tour can by determined in $O(n^2)$ time by a dynamic programming approach. It was shown by several authors in [2], [4] that the TSP restricted to asymmetric Monge matrices is pyramidally solvable.

The combinatorial structure of distance matrix depended on the numbering of rows and columns. A matrix $C = (c_{ij})$ is called a *permuted Monge* matrix if there is a permutation φ of its rows and columns such that the permuted matrix $C_\varphi = (c_{\varphi(i)\varphi(j)})$ is a Monge matrix. A permuted Monge matrix can be recognized in $O(n^2)$ time [4].

Burkad and Deinko [1]introduced a relaxation of the Monge condition (2). An $n \times n$ matrix $C = (c_{ij})$ is called a relaxed Monge matrix (RM-matrix) if it satisfies the following conditions for all indices $i, i+1, j, j+1, l \in N$ with $i + 1 < j \neq l$:

$$c_{i,i+1} + c_{jl} \leq c_{il} + c_{j,i+1} \tag{4}$$

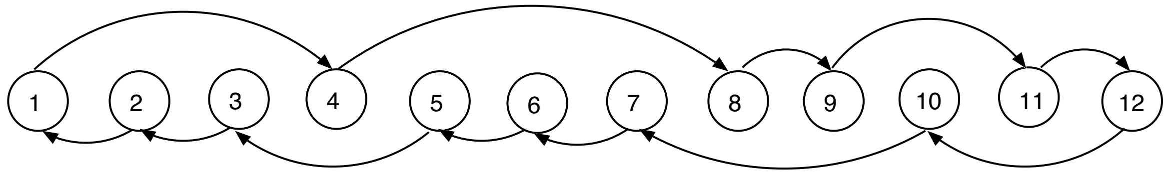
$$c_{i+1,i} + c_{jl} \leq c_{i+1,l} + c_{ji} \tag{5}$$

Note that diagonal elements of C are not involved in the definition of relaxed Monge matrices and thus may as well remain unspecified. Authors showed that the TSP restricted to symmetric RM-matrices is pyramidally solvable. It is shown that the system (4)-(5) is equivalent to the system of $O(n^2)$ inequalities, so the TSP with a permuted RM-matrix can be recognized and solved in $O(n^2)$ time.

3 Shortest pyramidal tour

We show that the shortest pyramidal tour can be recognized as a minimal path in the special constructed network in $O(n^2)$ time.

The asymmetric TSP is stated in the graph theory as follows. Given weighted complete digraph $K = (\overrightarrow{K}_n, c)$, find a Hamilto-



Obr. 1. Pyramidový cyklus v K
Fig. 1. Pyramidal tour in K

lacnejší Hamiltonovský cyklus $C_\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$. V tomto príspevku budeme nazývať Hamiltonov cyklus, t. j. a cyklus obsahujúci všetky vrcholy *0*, cyklus. Príklad pyramidového cyklu $\langle 1, 4, 8, 9, 11, 12, 10, 7, 6, 5, 3, 2\rangle$ v $\vec{K}_{12}$ je na obr. 1.

Združeným digrafom pre pyramidový cyklus $\varphi = \langle 1, n, n-1, \ldots, 2\rangle$ je sieť $G^\varphi = (\{s\} \cup U \cup V \cup \{t\}, A, d)$, ktorá má $2n$ vrcholov, jeden zdroj s a jedno ústie t, pričom

$$
\begin{aligned}
U &= \{u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}\}\\
V &= \{v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}\}\\
A &= A_s^+ \cup A_s^- \cup A_<^+ \cup A_<^- \cup A_f^+ \cup A_f^- \cup A_t^+ \cup A_t^-\\
A_s^+ &= \{[s, u_j] : u_j \in U\}\\
A_s^- &= \{[s, v_j] : v_j \in V\}\\
A_t^+ &= \{[u_i, t] : u_i \in U\}\\
A_t^- &= \{[v_i, t] : v_i \in V\}\\
A_f^+ &= \{[u_k, v_k] : u_k \in U, v_k \in V\}\\
A_f^- &= \{[v_k, u_k] : u_k \in U, v_k \in V\}\\
A_<^+ &= \{[u_i, u_j] \in U \times U : i < j\}\\
A_<^- &= \{[v_i, v_j] \in V \times V : i < j\}
\end{aligned}
$$

Ohodnotenie hrán $d : A \to Z$ sa definuje

$$
d(h) = \begin{cases}
0 & \text{ak} \quad h \in A_f\\
c_{1,k+1} + \sum_{j=2}^{k} c_{j,j-1} & \text{ak} \quad h = [s, u_k] \in A_s^+\\
c_{k+1,1} + \sum_{j=2}^{k} c_{j-1,j} & \text{ak} \quad h = [s, v_k] \in A_s^-\\
c_{kn} + \sum_{j=k+1}^{n} c_{j,j-1} & \text{ak} \quad h = [u_k, t] \in A_t^+\\
c_{nk} + \sum_{j=k+2}^{n} c_{j-1,j} & \text{ak} \quad h = [v_k, t] \in A_t^-\\
c_{ij} + \sum_{l=i+2}^{j-1} c_{l,l-1} & \text{ak} \quad h = [u_i, u_k] \in A_<^+\\
c_{ji} + \sum_{l=i+1}^{j-1} c_{l-1,l} & \text{ak} \quad h = [v_i, v_k] \in A_<^-
\end{cases} \tag{6}
$$

Špeciálny sled [1, 4, 3, 5, 4, 8, 7, 10, 9, 11, 10, 12], ktorý je jednoducho združený s pyramidovým cyklom $\pi = \langle 1, 4, 8, 9, 11, 12, 10, 7, 6, 5, 3, 2\rangle$ v digrafe K s pyramidovým cyklom $\varphi = \langle 1, 12, 11. \ldots, 2\rangle$, je reprezentovaný bodkovanými šípkami na obr. 2. Najlacnejší pyramidový cyklus v K možno nájsť ako najlacnejší cyklus

nian cycle $C_\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$ of minimal cost. In this paper we call a Hamiltonian cycle, i.e. a cycle containing all vertices in $\vec{K}_n$, a tour. Example of pyramidal tour $\langle 1, 4, 8, 9, 11, 12, 10, 7, 6, 5, 3, 2\rangle$ in $\vec{K}_{12}$ is shown in Figure 1.

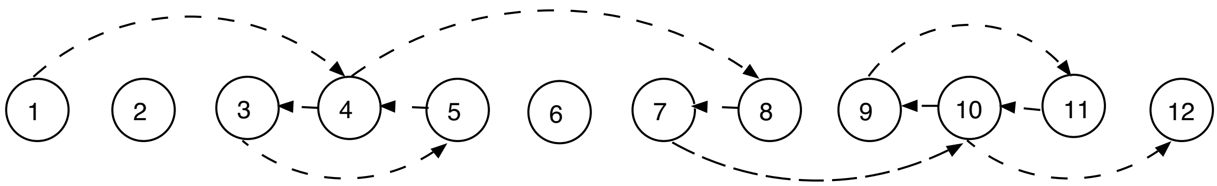
The associated digraph for the pyramidal tour $\varphi = \langle 1, n, n-1, \ldots, 2\rangle$ is the network $G^\varphi = (\{s\} \cup U \cup V \cup \{t\}, A, d)$ having $2n$ vertices with one source s and one sink t where

$$
\begin{aligned}
U &= \{u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}\}\\
V &= \{v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}\}\\
A &= A_s^+ \cup A_s^- \cup A_<^+ \cup A_<^- \cup A_f^+ \cup A_f^- \cup A_t^+ \cup A_t^-\\
A_s^+ &= \{[s, u_j] : u_j \in U\}\\
A_s^- &= \{[s, v_j] : v_j \in V\}\\
A_t^+ &= \{[u_i, t] : u_i \in U\}\\
A_t^- &= \{[v_i, t] : v_i \in V\}\\
A_f^+ &= \{[u_k, v_k] : u_k \in U, v_k \in V\}\\
A_f^- &= \{[v_k, u_k] : u_k \in U, v_k \in V\}\\
A_<^+ &= \{[u_i, u_j] \in U \times U : i < j\}\\
A_<^- &= \{[v_i, v_j] \in V \times V : i < j\}
\end{aligned}
$$

The weight of arcs is $d : A \to Z$ with

$$
d(h) = \begin{cases}
0 & \text{if} \quad h \in A_f\\
c_{1,k+1} + \sum_{j=2}^{k} c_{j,j-1} & \text{if} \quad h = [s, u_k] \in A_s^+\\
c_{k+1,1} + \sum_{j=2}^{k} c_{j-1,j} & \text{if} \quad h = [s, v_k] \in A_s^-\\
c_{kn} + \sum_{j=k+1}^{n} c_{j,j-1} & \text{if} \quad h = [u_k, t] \in A_t^+\\
c_{nk} + \sum_{j=k+2}^{n} c_{j-1,j} & \text{if} \quad h = [v_k, t] \in A_t^-\\
c_{ij} + \sum_{l=i+2}^{j-1} c_{l,l-1} & \text{if} \quad h = [u_i, u_k] \in A_<^+\\
c_{ji} + \sum_{l=i+1}^{j-1} c_{l-1,l} & \text{if} \quad h = [v_i, v_k] \in A_<^-
\end{cases} \tag{6}
$$

The dotted arrows in Figure 2 represent a special walk [1, 4, 3, 5, 4, 8, 7, 10, 9, 11, 10, 12] which is a sample associated with the pyramidal tour $\pi = \langle 1, 4, 8, 9, 11, 12, 10, 7, 6, 5, 3, 2\rangle$ in the digraph K with the pyramidal tour $\varphi = \langle 1, 12, 11. \ldots, 2\rangle$.

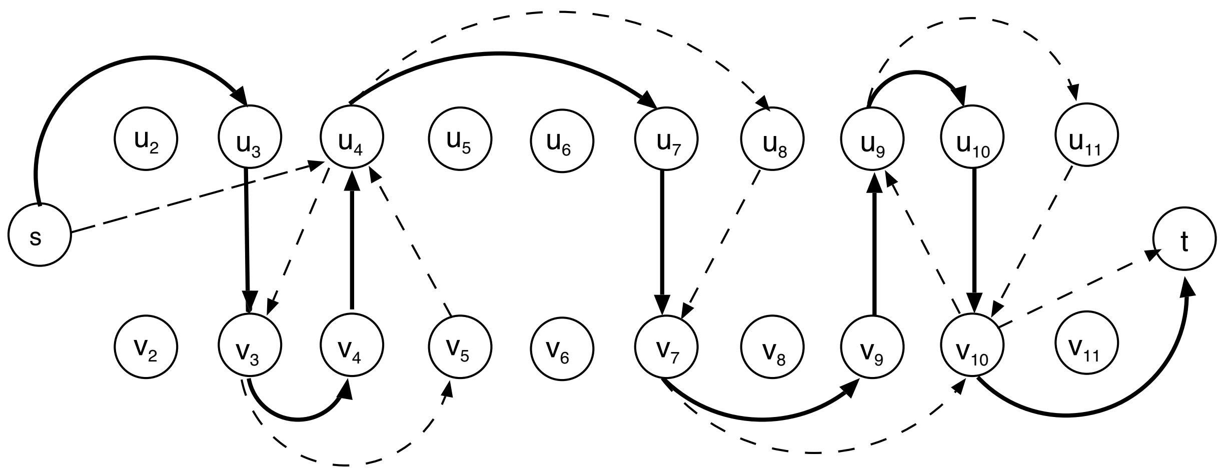


Obr. 2. Sled pre pyramidový cyklus v K
Fig. 2. Walk for pyramidal tour in K

z cyklov indukovaných najlacnejšou $s - t$ cestou v združenej sieti G^φ a cyklu φ. Ako môžeme vidieť na obr. 3 sled pre cyklus π je

The shortest pyramidal tour in K can be found as a minimal tour from the tour inducted by the shortest $s - t$ path in the zobrazený bodkovanými šípkami a indukovaná cesta hrubými šípkami.

associated network G^{φ} and the tour φ. As we see in Figure 3 a walk by tour π is figured by dotted arrows and the inducted path by bold arrows. The admissible walk in the graph K is the



Obr. 3. Cesta a sled pre pyramidový cyklus v G^{φ}
Fig. 3. Path and walk for pyramidal tour in G^{φ}

Prípustný sled v digrafe K je len fiktívny sled v sieti G^{π}. Najlacnejšia $s - t$ cesta je jeden spôsob ako vybrať náš špeciálny najlacnejší sled, ktorý je združený s pyramidovým cyklom. Pretože sieť G^{φ} je acyklická a $|A| = 2((n - 2) + (n\ 1) + \ldots + 1) = O(n^2)$ najlacnejšiu $s - t$ cestu možno nájsť v čase $O(n^2)$ napr. Bellman-Fordovou metódou [2].

fictive walk in the network G^{π} only. The shortest $s - t$ path is only one way how to select our special shortest walk which is associated with a pyramidal tour. Since the network G^{φ} is acyclic and $|A| = 2((n - 2) + (n\ 1) + \ldots + 1) = O(n^2)$ shortest $s - t$ path can be found in time $O(n^2)$, e.g. by Bellman-Ford method [2].

4 Algoritmus

Použijeme prezentovaný grafový algoritmus na hľadanie pyramidového cyklu v digrafe K ako základ pre dve heuristické algoritmy na riešenie asymetrickej úlohy TSP. Symetricky prípad študujeme ako špeciálny prípad, keď $c_{ij} = c_{ji}$.

Nech $\epsilon = (2, 3, \ldots, n, 1)$ a definujeme množinu $X(\psi) = \{\psi, \psi\epsilon, \ldots, \psi\epsilon_{n-1}\}$, t. j.

$$X(\psi) = \{(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}, \psi_n), (\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n, \psi_1), (\psi_3, \psi_4, \ldots, \psi_1, \psi_2), \ldots, (\psi_n, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})\}.$$

Definujeme $K_{\omega} = (\vec{K}_n, c_{\omega})$ kde $\omega \in X(\psi)$ a cena hrany $[i, j]$ je $c_{\omega}[i, j] = c_{\omega(i)\omega(j)}$. Deterministická heuristická metóda na hľadanie optimálneho riešenia π^* v K je zapísaná ako algoritmus v Pascale:

function $\pi^* = \text{PYRAMIDAL}(X(\omega))$
begin
$\pi^* := \langle \omega_1, \omega_n, \omega_{n-1}, \ldots, \omega_2 \rangle$;
$\varphi := \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n \rangle$;
while $\pi^* \neq \varphi$ **do begin**
for $\omega \in X(\varphi)$ **do begin**
find shortest pyramidal tour π in K_{ω};

4 Algorithm

We use the presented graph algorithm for searching the pyramidal path in digraph K as a base of two heuristic algorithms for solving asymetric TSP. We can study the symmetric TSP as a special case when $c_{ij} = c_{ji}$.

Let $\epsilon = (2, 3, \ldots, n, 1)$ and define the set $X(\psi) = \{\psi, \psi\epsilon, \ldots, \psi\epsilon_{n-1}\}$, i.e.

$$X(\psi) = \{(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}, \psi_n), (\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n, \psi_1), (\psi_3, \psi_4, \ldots, \psi_1, \psi_2), \ldots, (\psi_n, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})\}.$$

We define $K_{\omega} = (\vec{K}_n, c_{\omega})$ where $\omega \in X(\psi)$ and the weight of arc $[i, j]$ is $c_{\omega}[i, j] = c_{\omega(i)\omega(j)}$. The deterministic heuristic method for searching the optimal solution π^* in K in a Pascal-like algorithm is:

function $\pi^* = \text{PYRAMIDAL}(X(\omega))$
begin
$\pi^* := \langle \omega_1, \omega_n, \omega_{n-1}, \ldots, \omega_2 \rangle$;
$\varphi := \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n \rangle$;
while $\pi^* \neq \varphi$ **do begin**
for $\omega \in X(\varphi)$ **do begin**
find shortest pyramidal tour π in K_{ω};

```
            if c(π*) > c(π) then begin
                φ : = π*, π* : = π;
            end
        end
    end
end PYRAMIDAL (X(ω)) .
```

Algoritmus PYRAMIDAL(X) vracia riešenie π^*, ktoré závisí od štartujúcej množiny $X(\omega)$. Napríklad môžeme položiť $\omega = \epsilon$. Táto vlastnosť môže byť potlačaná nasledujúcim stochastickým algoritmom. Budeme používať náhodný generátor RANDOM PERMUTATION(N) cyklickej permutácie množiny N.

```
function π* = RANDOM\PYRAMIDAL
begin
    step : = 0;
    π* : = RANDOM\PERMUTATION(N);
    while step < n do begin
        step : = step + 1;
        ψ : = RANDOMn PERMUTATION(N);
        π : = PYRAMIDAL(X(ψ));
        if c(π*) > c(π) then begin
            π* = π, step : = 0;
    end
end RANDOM\PYRAMIDAL
```

Nie je jednoduché študovať ich zložitosť, pretože *while* cyklus končí po n neúspešných hľadaniach. Počítačové experimenty ukazujú, že PYRAMIDAL metóda má zložitosť $O(n^3)$ a RANDOM PYRAMIDAL metóda zložitosť $O(n^4)$:

5 Výsledky

Pascalovský program algoritmu RANDOM_PYRAMIDAL sme použili na niektoré [6] publikované Euklidovské inštancie úloh TSP s najlepšími známymi riešeniami.

Výsledky vybraných Euklidovských inštancií z TSPLIB Tab. 1

Inštancia	Rozmer n	Najlepšie známe riešenie	Pyramidové riešenie	Pomer
berlin52	52	57642	57642	1,0000
eil76	76	306	306	1,0000
rd100	100	7910	7910	1,0000
ch130	130	6110	6124	1,0023
ch150	150	6528	6526	0,9997
tsp225	225	3919	3919	1,0000
pcd442	442	50778	51353	1,0113

Zhrnutie výsledkov experimentov možno vidieť v tabuľke 1. Pre inštanciu ch150 sa podarilo nájsť lepšie riešenie než je publikované. Stochastická analýza oboch heuristík môže byť zaujímavá

```
            if c(π*) > c(π) then begin
                φ : = π*, π* : = π;
            end
        end
    end
end PYRAMIDAL (X(ω)) .
```

The algorithm PYRAMIDAL(X) returns the solution π^* which depends on start set $X(\omega)$. For example, we can set $\omega = \epsilon$. This property can be suppressed by the following stochastic algorithm. We will use a random generator RANDOM PERMUTATION(N) of the cyclic permutation of the set N.

```
function π* = RANDOM\PYRAMIDAL
begin
    step : = 0;
    π* : = RANDOM\PERMUTATION(N);
    while step < n do begin
        step : = step + 1;
        ψ : = RANDOMn PERMUTATION(N);
        π : = PYRAMIDAL(X(ψ));
        if c(π*) > c(π) then begin
            π* = π, step : = 0;
    end
end RANDOM\PYRAMIDAL
```

It is not easy to study complexity of these algorithms because *while* cycles terminate after n unsuccessful searchings. The computation experiments show that PYRAMIDAL method has complexity $O(n^3)$ and RANDOM PYRAMIDAL has complexity $O(n^4)$:

5 Results

Using the PASCAL program for the algorithm RANDOM_ PYRAMIDAL on an Euclidean TSP we have obtained the best known solutions in almost selected instances [6].

Results of selected Euclidean instances from TSPLIB Tab. 1

Instance	Size n	Best known solution	Pyramidal solution	Ratio
berlin52	52	57642	57642	1.0000
eil76	76	306	306	1.0000
rd100	100	7910	7910	1.0000
ch130	130	6110	6124	1.0023
ch150	150	6528	6526	0.9997
tsp225	225	3919	3919	1.0000
pcd442	442	50778	51353	1.0113

A summary of the results can be seen in Table 1. In instance ch150 a better solution was found then the one all ready published. The probabilistic analysis of both heuristics may be very interako aj navrhnutý smer vývoja aproximačného algoritmu pre úlohu TSP. Mohli by byť zaujímavé tiež štúdie pyramidových vlastností ďalších *NP*-ťažkých kombinatorických optimalizačných problémov.

esting an well as a proposed direction in the development of TSP approximation algorithm. It would be interesting to study the pyramidal property for other *NP*-hard combinatorial optimization problems.

Literatúra - References

[1] R. E. BURKAD, V. G. DEINKO: *On the traveling salesman problem with a relaxed Monge matrix*, Spezialforschungsbereich F003, Optimierung und Kontrolle, Karl-Franzens-Universit. at Graz & Technische Univesit. at Graz (1998), 1-10
[2] E. L. LAWLER, J. K. LENSTRA, A. H. G. RINNOOY KAN AND D. B.SHMOYS: *The Traveling Salesman problem*, Wiley, Chichester, 1985
[3] F. SUPNIK: *Extreme Hamiltonian line*, Annals of Math. 66, (1957), 1957-201
[4] V. M. DEMIDENKO AND V. L. FILONENKO: *On the reconstruction of special structured matrices*, Aktualnyje Problemy EVM i programirovanije, Dnepropetrovsk, DGU, 1979, (in Russian)
[5] E. L. LAWLER: *Shortest path and network flow algorithms*, in Discrete Optimization I, Annals of discrete mathematics 4, North-Holland, 1979
[6] G. REINELT: *TSPLIB - A Traveling Salesman Problem Library, http://www.iwr.ini-heidelberg.de/comopt/soft/*TSPLIB95/TSPLIB.htm
[7] I. STANKOVIANSKÁ A: *The Capacited Arc Problems on Transportation Networks (Hranovokapacitné úlohy na dopravných sieťach)*, -dissertation, Žilina, (1996), (in Slovak)