https://doi.org/10.26552/com.C.2000.4.35-42

Jaroslav Janáček *

DOPRAVNO-OPTIMÁLNY ROZKLAD REGIÓNU

TRANSPORT-OPTIMAL PARTITIONING OF A REGION

V tomto článku za zaoberáme úlohou členenia obývaného regiónu. Takéto členenie sa vykonáva kedykoľvek sa mení verejnosprávna sústava. Na dostupnosť služieb má vplyv aj formovanie podregiónov aj umiestnenie ich stredísk. Ak je služba poskytovaná obyvateľom umiestnená v stredisku podregiónu, môže byť vyčíslená dostupnosť a môže byť riešená úloha optimálneho rozkladu regiónu a umiestnenia stredísk. Tento článok uvádza rôzne úlohy rozkladu a príslušné metódy ich riešenia pre rozsiahlé prípady z praxe.

This paper deals with a problem of inhabited region partitioning. The partitioning is performed when a public administration system is changed. Location of subregion centres is usually connected with the partitioning. Both of these activities, the location subregions centres and forming of the subregions, have impacted public service accessibility. When the service provided to inhabitants is concentrated in the subregion centres, accessibility can be evaluated and the problem of optimal partitioning and centre location can be solved. This paper shows various partitioning problems and reports on associated solution techniques and results obtained for real-sized instances.

1. Úvod

Štruktúra každej verejno-správnej sústavy odráža lokálne a globálne politické udalosti a má do istej miery vplyv na sociálne záležitosti. Okrem týchto súvislostí štruktúra ovplyvňuje dĺžku cesty, ktorú musí obyvateľ regiónu prejsť, aby sa dostal k službe, ktorá je obvykle umiestnená v stredisku regiónu. Túto dopravnú charakteristiku je možné ľahko vyhodnotiť a aj keď nemôže byť považovaná za univerzálne kritérium kvality verejnosprávnej sústavy, mala by byť povinnou časťou každého návrhu verejnosprávnej sústavy.

Dostupnosť služieb ako meradlo kvality verejnosprávnej sústavy môže byť definované ako priemerná dĺžka, ktorú musí precestovať obyvateľ podregiónu, aby dosiahol najbližšie stredisko podregiónu. Toto kritérium kvality môže byť vyhodnotené pre ľubovoľný návrh štruktúry verejnosprávnej sústavy, danej umiestnením stredísk podregiónov za predpokladu, že príslušné podregióny sú vytvorené priradením obyvateľa k najbližšiemu stredisku podregiónu. Navyše je možné formulovať a riešiť úlohu optimálneho výberu umiestnení stredísk podregiónov za danej množiny možných umiestnení tak, aby výsledné kritérium dostupnosti bolo čo najlepšie.

Kritérium dostupnosti nepokrýva celkom pojem kvality návrhu verejnosprávnej sústavy, pretože pojem kvalita má aj ekonomické aspekty. Tieto aspekty nedovoľujú ani vytvoriť ľubovoľný počet podregiónov, ani umiestniť strediská podregiónov v ľubovoľných miestach. To je dôvod, prečo obmedzenie počtu podregiónov vstupuje do tejto úlohy ako protiváha dostupnosti.

1. Introduction

The structure of any public administration system reflects local and global political affairs and has an affect upon social events to some extent. Beside these connections, the structure influences the length of a trip, which has to be travelled by an inhabitant of a region to access a service that is usually located at a regional centre. This transport characteristics of a public administration structure is easy to evaluate and even if it cannot be considered as universal quality criterion of a public administration system, it should be an obligatory part of every public administration system design.

The service accessibility as a measure of the public administration system quality can be defined as average length, which must be travelled by an inhabitant of the subregion to reach the closest subregion centre. This quality criterion is possible to evaluate for any public administration system structure design given by subregion centre locations on consideration that the associated subregions are formed by assignment of an inhabitant to the closest subregion centre. Furthermore, it is possible to formulate and solve the problem of optimal selection of subregion centre locations from a given set of possible locations, so the resulting accessibility criterion would be the best possible.

However, the accessibility criterion does not cover the whole term of the quality of public administration system design, because this term "quality" even has economical aspects. These aspects allow neither to form an arbitrary number of subregions nor to locate subregional centres in arbitrary places. That is why the constraint on the number of subregions enters this problem as a counterbalance to the accessibility.

* **Prof. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc.**
Department of Transportation Networks, Faculty of Management Science and Informatics, University of Žilina, 01026,
E-mail: jardo@frdsa.fri.utc.sk

V rozsahu tohto článku sa pokúsime odhadnúť vplyv počtu podregiónov na priemernú dopravnú záťaž obyvateľa. Ďalej budeme študovať dôsledky požiadavky na rovnomerné rozdelenie obyvateľov medzi navrhovanými podregiónmi z hľadiska využitia výpočtových metód.

2. Úloha dopravno-optimálneho rozkladu regiónu

V nasledujúcej sekcii budeme predpokladať, že v celom regióne je daná dopravná sieť. Sieť spája n obcí a je známy počet obyvateľov b_j v každom mieste $j = 1, \ldots, n$. Označujeme $\{d_{ij}\}$ maticu vzdialeností medzi každou dvojicou obcí. Naším cieľom je vytvoriť p zhlukov (podregiónov) obcí a určiť pre každý zhluk S_k, $k = 1, \ldots, p$ jedno stredisko i_k podregiónu z množiny možných umiestnení stredísk $\{1, \ldots, m\}$ tak, aby miera dostupnosti, daná nasledujúcim výrazom, bola čo najmenšia.

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \sum_{j \in S_k} b_j d_{i_k j}\right) / \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j \in S_k} c_{i_k j}$$

Uvedený výraz vyjadruje priemernú vzdialenosť obyvateľa od strediska podregiónu a koeficient $c_{i_k j}$ je príspevok miesta j k tomuto kritériu v prípade, že miesto je priradené k stredisku i_k.

Označme $x_{ij} \in \{0, 1\}$ nula-jednotkovú premennú, ktorá vyjadruje, či obec j má alebo nemá byť priradená stredisku podregiónu i. Nula – jednotková premenná $y_i \in \{0, 1\}$ modeluje rozhodnutie, či stredisko podregiónu má alebo nemá byť umiestnené v mieste i. Potom model optimálneho vytvárania podregiónov môže byť zapísaný nasledujúcim spôsobom:

$$\textit{minimalizujte} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\textit{za podmienok} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \textit{pre } j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

$$x_{ij} \le y_i \qquad \textit{pre } i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \le p \tag{4}$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \quad \textit{pre } i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Čo je úloha o p-mediáne v sieti s kladnými ohodnoteniami hrán.

V modeli podmienky (2) zabezpečujú, aby každá obec bola priradená práve jednému miestu z množiny možných umiestnení. Podmienky (3) spôsobia, že ak je obec priradená niektorému z možných miest, tak tam bude umiestnené stredisko podregiónu. Podmienka (4) nepovoľuje prekročiť požadovaný počet podregiónov. Skutočnosť, že ohodnotenia hrán sú kladné spôsobí, že bude umiestnených presne p stredísk.

3. Riešenie úlohy dopravno-optimálneho rozkladu regiónu

Zaveďme Lagrangeov multiplikátor f pre podmienku (4), ktorá bude uvoľnená, potom úloha (1) – (5) môže byť preformulovaná nasledujúcim spôsobom:

Within scope of this paper, we try to estimate an influence of the number of subregions to an inhabitant's average transport load. Furthermore, we shall study consequences of the demand on uniform distribution of inhabitants over designed subregions from the point of exploitation of the computational methods.

2. Transport-optimal region partitioning problem

In the following sections, we shall assume that a transport network covers the whole region. The network connects n dwelling places and there is known number b_j of inhabitants at each place $j = 1, \ldots, n$. We denote $\{d_{ij}\}$ matrix of distances between each pair of dwelling places. Our goal is to form p clusters (subregions) of dwelling places and to determine one subregional centre i_k for each cluster S_k, $k = 1, \ldots, p$ from a set of possible centre locations $\{1, \ldots, m\}$, so the measure of accessibility given by the following expression be as small as possible.

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \sum_{j \in S_k} b_j d_{i_k j}\right) / \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j \in S_k} c_{i_k j}$$

The referred term expresses the average distance of inhabitant to subregional centre and the coefficient $c_{i_k j}$ is the contribution of the dwelling place j to this criterion in the case that the dwelling place is assigned to the centre i_k.

Let us denote $x_{ij} \in \{0, 1\}$ the zero – one variable, which expresses if dwelling place j should or should not be assigned to subregional centre i. Zero - one variable $y_i \in \{0, 1\}$ models the decision if a subregional centre should or should not be located at place i. Then a programme of optimal subregion forming may be completed in the following way:

$$\textit{minimise} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\textit{subjet to} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \textit{for } j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

$$x_{ij} \le y_i \qquad \textit{for } i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \le p \tag{4}$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \quad \textit{for } i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

What is p-median problem in a network with positive weights of edges? In this programme, constraints (2) ensure that each dwelling place must be assigned to exactly one place from the set of possible locations. Constraints (3) cause a subregion centre to be placed at possible location i whenever some dwelling place is assigned to the location. Constraint (4) does not allow to overstep the demanded number of subregions. The fact that all weights of edges are positive causes that p centres will be placed.

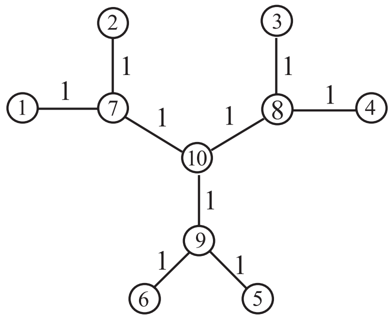
3. A technique for transport-optimal region partitioning problem

Let us introduce Lagrangean multiplier f for constraint (4), which is to be relaxed, and then the problem (1) – (5) can be reformulated this way:

Nájdite $f \geq 0$, také, aby hodnoty premenných y_i, $i = 1, \ldots, m$ optimálneho riešenia úlohy (6), (2), (3), (5) spĺňali podmienku (4) ako rovnosť. Uvažovaná účelová funkcia je

$$\sum_{i=1}^{m} f\,y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,x_{ij}. \qquad (6)$$

Ak f je pevne zvolené, potom model (6), (2), (3), (5) opisuje kapacitne neobmedzenú umiestňovaciu úlohu. Pre riešenie úlohy s nezápornými hodnotami f a $\{c_{ij}\}$, sme vyvinuli a implementovali procedúru *BBDual* [1], [3], [4]. Pri testovaní v priebehu výpočtových experimentov s veľkými sieťami, procedúra preukázala svoju schopnosť riešiť rozsiahle úlohy dostatočne rýchlo na to, aby ju bolo možné používať opakovane v zložitejších algoritmoch. Aby sme našli požadovanú hodnotu f, konštruovali sme algoritmus, v ktorom funkcia $Q(f, c)$ vydáva počet premenných y_i, ktorých hodnota je rovná jednej v optimálnom riešení úlohy (6), (2), (3), (5) pre zadané f, c.



Obr. 1.
Fig. 1.

0. Položte $f_{min} = 0$, $f_{max} = \sum_{j=1}^{n}$, $max\{c_{ij} : i = 1, ,m\}$,

   $f = (f_{max} - f_{min})/2$.
1. Pokiaľ $(Q(f, c) \neq p)$ a $(f_{max} - f_{min} \geq \epsilon)$ opakujte.
   Ak $(Q(f, c) > p$, potom položte $f_{min} = f$, inak položte $f_{max} = f$.
   Položte $f = (f_{max} - f_{min})/2$.

Optimálne riešenie $\langle y, x\rangle$ úlohy (6), (2), (3), (5) pre výsledné f nemusí nutne spĺňať podmienku (4) ako rovnosť. Napríklad pre sieť na obr. 1 neexistuje žiadne f také, pre ktoré by optimálne riešenie (6), (2), (3), (5) spĺňalo podmienku (4) ako rovnosť. V sieti na obr. 1 sa predpokladá $b_j = 1$ pre obce $j = 1, \ldots, 10$, ďalej že množina možných umiestnení je totožná s množinou obcí a že $p = 2$.

Po vykonaní experimentov na reálnych sieťach uvedených v nasledujúcej sekcii bolo zistené, že vyššie uvedený algoritmus vo všetkých prípadoch našiel riešenie s požadovaným počtom podregiónov.

4. Úloha kapacitne obmedzeného rozkladu regiónu

V tejto sekcii sa budeme zaoberať prípadom, keď treba okrem podmienky neprekročenia maximálneho počtu p podregiónov rešpektovať aj podmienku, že počet obyvateľov žiadneho podregiónu nesmie byť menší ako zadaný počet q. Táto úloha je riešiteľná iba ak platí nasledujúca nerovnosť $q < b/p$, kde b označuje celkový počet obyvateľov v delenom regióne. Navyše, ak je splnená podmienka $b/(p+1) < q$ podmienka (4) nemusí byť súčasťou príslušného modelu.

Find $f \geq 0$, so that values of variables y_i, $i = 1, \ldots, m$ of the optimal solution of problem (6), (2), (3), (5) meet constraint (4) as equality. The considered objective function is

$$\sum_{i=1}^{m} f\,y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,x_{ij}. \qquad (6)$$

If f is fixed, then problem (6), (2), (3), (5) forms an incapacitated location problem. To solve the problem for nonnegative values of f and $\{c_{ij}\}$, we devised and implemented procedure *BBDual* [1], [3], [4]. Being tested during computational experiments with large networks, the procedure proved to be able to solve large-sized problems quickly enough to be used repeatedly in more complicated algorithms.

To find demanded value f, we have completed an algorithm, in which function $Q(f, c)$ gives number of variables yi ,which value is equal to one in the optimal solution of problem (6), (2), (3), (5) for given f, c.

0. Set $f_{min} = 0$, $f_{max} = \sum_{j=1}^{n}$, $max\{c_{ij} : i = 1, ,m\}$, $f = (f_{max} - f_{min})/2$.

1. **While** $(Q(f, c) \neq p)$ and $(f_{max} - f_{min} \geq \epsilon)$ **repeat.**
   If $(Q(f, c) > p$ **then** set $f_{min} = f$, **otherwise** set $f_{max} = f$.
   Set $f = (f_{max} - f_{min})/2$.

Optimal solution $\langle y, x\rangle$ of the problem (6), (2), (3), (5) for f resulting from the algorithm above provides both subregional centres (there are those, for which $y_i = 1$ holds) and subregions given by the assignment of dwelling places to subregional centres (dwelling place j is assigned to place i if and only if $x_{ij} = 1$ holds).

It is necessary to remark that the optimal solution $\langle y, x\rangle$ of problem (6), (2), (3), (5) for resulting f need not necessarily meet constraint (4) as equality. For example, there is no f, so that an optimal solution of (6), (2), (3), (5) meets constraint (4) as equality for the network in Fig. 1. In the network in Fig. 1, there is considered $b_j = 1$ for dwelling places $j = 1, \ldots, 10$, the set of possible locations in identical to the set of dwelling places and $p = 2$.

Having performed the experiments on real networks reported in the next section, it was found that the above-mentioned algorithm reached solution with the demanded number of subregions in all instances.

4. The capacitated region-partitioning problem

In this section, we shall focus on a case, when not only the constraint of maximal number p of subregions should be kept but also number of inhabitants of no particular subregion should be lower than given number q. This new problem is solvable only if the following inequality holds $q < b/p$, where b denotes the total number of inhabitants of the partitioned region. Furthermore, if in addition the constraint $b/(p+1) < q$ is met, constraint (4) need not be included into the associated model.

Zaveďme nula-jednotkové premenné x_{ij} a y_i, aby sme modelovali tie isté rozhodnutia ako v predchádzajúcej sekcii a použime tie isté označenia koeficientov, potom môžeme opísať túto novú úlohu nasledovne:

$$\textit{minimalizujte} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,x_{ij} \tag{7}$$

$$\textit{za podmienok} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \textit{pre } j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

$$x_{ij} \le y_i \qquad \textit{pre } i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_{ij} \ge q y_i \qquad \textit{pre } i = 1, \ldots, m \tag{10}$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \qquad \textit{pre } i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\,. \tag{11}$$

Vo vyššie uvedenom modeli podmienky (8) zabezpečujú, aby každá obec bola priradená práve jednému miestu z množiny možných umiestnení. Podmienky (9) spôsobia, že ak je obec priradená niektorému z možných miest, tak tam bude umiestnené stredisko podregiónu. Podmienky (10) zabezpečujú, že kedykoľvek bude stredisko podregiónu umiestnené v mieste i, tak mu musí byť priradených prinajmenšom q obyvateľov.

5. Riešenie úlohy kapacitne obmedzeného rozkladu regiónu

Pre riešenie úlohy (7) – (11) sme navrhli heuristickú metódu, ktorej výstupom nie je iba suboptimálne riešenie, ale aj dolná hranica optimálneho riešenia. Metóda pozostáva z exaktného riešenia Lagrangeovej relaxácie úlohy (7) – (11) a z dvojfázovej výmennej heuristiky.

Získané riešenie Lagrangeovej relaxácie poskytuje dolnú hranicu hodnoty optimálneho riešenia. Dvojfázová heuristika štartuje z neprípustného riešenia získaného exaktným riešením Lagrangeovej relaxácie a znižuje neprípustnosť vzájomnými výmenami obcí z rôznych podregiónov.

Lagrangeova relaxácia bola použitá pre uvoľnenie podmienok (10). Pre každú podmienku tohto typu bol zavedený Lagrangeov multiplikátor u_i, pre $i = 1, \ldots, m$ a súčet $\sum_{i=1}^{m} u_i \left(q y_i - \sum_{j=1}^{n} b_j\, x_{ij} \right)$ bol pridaný k účelovej funkcii (7). Týmto spôsobom sme získali nasledujúci model:

$$\textit{minimalizujte } g(u, x, y) = \sum_{i=1}^{m}(u_i q) y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} - b_j u_i) x_{ij} \tag{12}$$

za podmienok (8), (9), (11).

To je opäť kapacitne neobmedzená úloha, ktorá je riešiteľná pre pevne nezáporné u_i vyššie uvedenou procedúrou *BBDual*.

Let us introduce zero to one variables x_{ij} and y_i to model the same decisions as in previous section and let us use the same notation of the coefficients, then we can describe this new capacitated problem by the model:

$$\textit{minimise} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,x_{ij} \tag{7}$$

$$\textit{subjet to} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \textit{for } j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

$$x_{ij} \le y_i \qquad \textit{for } i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_{ij} \ge q y_i \qquad \textit{for } i = 1, \ldots, m \tag{10}$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \qquad \textit{for } i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\,. \tag{11}$$

In the above programme, constraints (8) ensure that each dwelling place must be assigned to exactly one place from the set of possible locations. Constraints (9) cause a subregion centre to be placed at possible location i whenever some dwelling is assigned to the location. Constraint (10) ensures that whenever a subregion centre is located at place i, then there must be assigned at least q inhabitants to the place.

5. A technique for the capacitated region partitioning problem

To solve problem (7)-(11), we designed a heuristic method, whose outputs are not only a suboptimal solution but also a lower bound on the optimal solution. The method consists of exact solving the Lagrangean relaxation of problem (7)-(11) and of – a two-phase improvement exchange heuristic.

The obtained solution of the Lagrangean relaxation gives the lower bound on objective function value of the optimal solution. The two-phase exchange heuristic starts from the infeasible solution obtained by the exact solving of the Lagrangean relaxation and lowers the infeasibility by mutual exchanges of the dwelling places from different subregions.

The Lagrangean relaxation was used to relax constraints (10). For each constraint of this type nonnegative Lagrangean multiplier u_i, for $i = 1, \ldots, m$ m was introduced, and the sum $\sum_{i=1}^{m} u_i \left(q y_i - \sum_{j=1}^{n} b_j\, x_{ij} \right)$ was added to the objective function (7). This way we get the following model:

$$\textit{minimise } g(u, x, y) = \sum_{i=1}^{m}(u_i q) y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} - b_j u_i) x_{ij} \tag{12}$$

subject to (8), (9), (11).

This is again an incapacitated location problem, which is solvable by the above-mentioned procedure *BBDual* for fixed nonnegative u_i.

Hodnota účelovej funkcie (12) optimálneho riešenia úlohy (12), (8), (9), (11) pre pevne zvolené u poskytne dolnú hranicu (LB) účelovej funkcie optimálneho riešenia úlohy (7) – (11). Hodnota účelovej funkcie (7) pre ľubovoľné prípustné riešenie (7) – (11) je hornou hranicou (UB) optimálneho riešenia úlohy (7) – (11). Ak je známa horná hranica UB, potom môže byť dolná hranica zlepšená použitím subgradientovej metódy s pravidlom zastavenia určeným hodnotou „presnosti" δ. Subgradientová metóda postupuje podľa nasledujúcich krokov:

0. Položte $u = 0$ a $LB = -\infty$.
1. Pre zadané u vypočítajte optimálne riešenie úlohy (12), (8), (9), (11) a označte ho $\langle x(u), y(u)\rangle$. Príslušnú hodnotu účelovej funkcie označte g.
2. **Ak** $g > LB$, **potom choďte na krok** 3 **inak choďte na krok** 4.
3. Položte $LB = g$ a určte gradient G z funkcie $g(u, x, y)$ obmedzený na zložky z u v bode $\langle u, x(u), y(u)\rangle$

   podľa $G_i = qy_i(u) - \sum_{j=1}^{n} b_j x_{ij}(u)$ pre $i = 1, \ldots, m$.

   Vypočítajte $G^2 = \sum_{i=1}^{m}(G_i)^2$. A určte $\alpha = 0.9(UB - LB)/G^2$.

   Ak $\alpha < \delta$, **končte, inak** definujte subgradient $\underline{G}$ podľa $\underline{G}_i = (max\{0, u_i + \alpha G_i\} - u_i)/\alpha$ pre $i = 1, \ldots, m$, a vykonajte krok subgradientovej metódy s použitím vzťahu $u_i = u_i + \alpha \underline{G}_i$ pre $i = 1, \ldots, m$ a **pokračujte krokom** 1.
4. **Ak** $\alpha < \delta$ **končte, inak** vykonajte krok subgradientovej metódy podľa vzťahu $u_i = u_i - 0.1\alpha \underline{G}_i$ pre $i = 1, \ldots, m$, položte $\alpha = 0.9\alpha$ a **pokračujte krokom** 1.

Aby sme získali prípustné riešenie úlohy (7) – (11), vyvinuli sme Lagrangeovu heuristiku, ktorá využíva výsledné riešenie $\langle x(u), y(u)\rangle$ zo subgradientovej metódy. Táto heuristika identifikuje každú obec j, ktorá môže byť priradená inému podregiónu bez toho, aby sa počet obyvateľov znížil pod hodnotu q. V ďalšom kroku sú identifikované všetky súčasné podregióny, v ktorých je počet obyvateľov menší ako q. Potom sú špecifikované obce priradené niektorému zo špecifických podregiónov podľa stratégie „najlepší vhodný" tak, aby prislúchajúce zvýšenie účelovej funkcie (7) bolo minimálne. Ak po prehľadaní všetkých prípustných zmien nebolo nájdené žiadne prípustné riešenie, potom je vybratý podregión s najmenším počtom obyvateľov a je zrušený. Obce prislúchajúce zrušenému podregiónu sú priradené iným podregiónom podľa spomenutého pravidla.

Pre ďalšie zlepšenie riešenia získaného Lagrangeovou heuristikou sme zostrojili výmennú heuristiku, založenú na stratégii „prvý vhodný". Táto heuristika postupne skúma prípustné dvojice obcí, ktoré sú priradené rôznym podregiónom a ktorých vzájomná výmena nespôsobí pokles počtu obyvateľov pod hodnotu q v žiadnom z dotknutých podregiónov. Kedykoľvek heuristika nájde prípustnú dvojicu obcí, ktorých výmena spôsobí pokles účelovej funkcie (7), výmena sa vykoná. Heuristika ukončí svoju činnosť, ak všetky prípustné dvojice sú preskúmané a žiadna z nich nie je vhodná pre výmenu.

V priebehu numerických experimentov sme zistili, že rozdiel medzi hodnotou účelovej funkcie výsledného riešenia úlohy (7) –

The value of objective function (12) for the optimal solution of problem (12), (8), (9), (11) for fixed u gives the lower bound (LB) on objective function value of the optimal solution of problem (7) – (11). Objective function value (7) for any feasible solution of (7) – (11) is an upper bound (UB) of the optimal solution of problem (7) – (11). If current upper bound UB is known, the lower bound may be improved using a subgradient method with stopping rule given by value δ of precision. The subgradient method proceeds in accordance to the following steps:

0. Set $u = 0$ and $LB = -\infty$.
1. For given u compute optimal solution of problem (12), (8), (9), (11) and denote it as $\langle x(u), y(u)\rangle$. The associated objective function value denotes g.
2. **If** $g > LB$, **then go to step** 3, **otherwise go to step** 4.
3. Set LB = g and determine gradient G of function $g(u, x, y)$ restricted on components of u at point $\langle u, x(u), y(u)\rangle$

   according to $G_i = qy_i(u) - \sum_{j=1}^{n} b_j x_{ij}(u)$ for $i = 1, \ldots, m$.

   Compute $G^2 = \sum_{i=1}^{m}(G_i)^2$ and determine $\alpha = 0.9(UB - LB)/G^2$.

   If $\alpha < \delta$, then stop, otherwise define subgradient $\underline{G}$ in accordance to $\underline{G}_i = (max\{0, u_i + \alpha G_i\} - u_i)/\alpha$ for $i = 1, \ldots, m$, and perform step of the subgradient method using expression $u_i = u_i + \alpha \underline{G}_i$ for $i = 1, \ldots, m$, and **continue with step** 1.
4. If $\alpha < \delta$ **then stop, otherwise** perform step of the subgradient method using expression $u_i = u_i - 0.1\alpha \underline{G}_i$ pro $i = 1, \ldots, m$, set $\alpha = 0.9\alpha$ and **continue with step** 1.

To obtain feasible solution of problem (7) – (11), we developed Lagrangean heuristic, which makes use of solution $\langle x(u), y(u)\rangle$ resulting from the subgradient method. This heuristic identifies each dwelling place j, which can be assigned to other subregion without the number of inhabitants of the original subregion decreases below value q. In the next step, all current subregions are identified, in which the number of inhabitants is less than q. Then the specified dwelling places are assigned to some of the specified subregions in accordance to the strategy "best admissible", so that the associated increase of objective function (7) would be minimal. If no feasible solution is obtained after fathoming all admissible changes, then a subregion with the smallest number of inhabitants is chosen and cancelled. The dwelling places associated with the cancelled subregion are assigned to the other subregions in accordance to the above-mentioned rule.

For the next possible improvement of the solution obtained by Lagrangean heuristic, we developed an exchange heuristic based on the strategy "first admissible". This heuristic examines sequentially feasible pairs of dwelling places that are assigned to different subregions and that a mutual exchange does not decrease the number of inhabitants below value q in any of the two associated subregions. Whenever the heuristic finds a feasible pair of dwelling places where the exchange decreases the objective function (7), the exchange is performed. The heuristic stops when all feasible pairs are examined, and none are admissible for the exchange operation.

(11) a získanou dolnou hranicou bol priveľký. To bol dôvod, prečo sme navrhli zlepšenie vyššie uvedenej metódy s využitím „zosilňujúcej podmienky“ (4). Táto pôvodne nadbytočná podmienka bola vložená do modelu (7) – (11). Zlepšený algoritmus subgradientovej metódy opäť pracuje podľa krokov 0. – 4., ale v kroku 1 rieši úlohu (7) – (11), (4) namiesto (7) – (11). Pri riešení úlohy (7) – (11), (4) bola opäť použitá procedúra opísaná v sekcii 3.

6. Numerické experimenty

Numerické experimenty boli zamerané na zistenie časovej náročnosti vyvinutých algoritmov pre riešenie kapacitne neobmedzených, ako aj obmedzených úloh rozkladu regiónu. Pre algoritmus riešenia kapacitne obmedzenej úlohy rozkladu regiónu bol do sledovania zahrnutý aj rozdiel hodnoty získaného riešenia a dolnej hranice. V súvislosti s týmto rozdielom bol skúmaný aj vplyv výmennej heuristiky.

Tab. 1

p	1	2	3	4	5	6
d [km]	137.3	78.7	59.9	51.9	47.6	44.3
t [s]	0	0	23	23	24	24
i	2	4	6	7	9	10

Keď boli skúmané riešenia kapacitne obmedzenej úlohy, zistili sme, že úloha (7) – (11) nepokrýva celkom praktické požiadavky, dotýkajúce sa tvaru podregiónu. Všeobecne sa očakáva, že vytvorený podregión bude súvislý. To značí, že žiadna obec, priradená inému podregiónu nebude ležať na najkratšej ceste, spájajúcej ľubovoľnú obec podregiónu s príslušným strediskom. Model (7) – (11) nanešťastie dovoľuje vytvorenie nesúvislého podregiónu. Pre potreby nášho výskumu bola táto nesúvislosť kvantifikovaná.

Predpokladajme, že riešenie je určené počtom p podregiónov, množinami S_k obcí (S_k označuje k-tý podregión) a strediskami a strediskami i_k podregiónov pre $k = 1, \ldots, p$. Označme $\underline{S}_k$ podmnožinou S_k, kde sa $\underline{S}_k$ skladá z obcí, pre ktoré na ich najkratšej ceste do strediska i_k leží obec priradená inému podregiónu. Pre každé $j \in \underline{S}_k$ symbol $h(j)$ označuje index prvej obce z $S_k - \underline{S}_k$, ktorá leží na najkratšej ceste z j do i_k a ktorá nie je nasledovaná na tejto ceste žiadnou obcou z $\underline{S}_k$.

Nesúvislosť meriame hodnotou nasledujúceho výrazu

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \sum_{j \in S_k} b_j\, d_{jh(j)}\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right).$$

Pre testovanie chovania algoritmov na úlohách veľkých rozmerov boli experimenty vykonané s cestnou sieťou celej Slovenskej republiky okrem okolia Bratislavy. Sieť obsahovala 2889 obcí. V testoch boli použité dve množiny možných umiestnení. Prvá množina zahrňovala sedem súčasných krajských miest (okrem Bratislavy) a druhá množina bola tvorená sedemdesiatimi súčasnými okresnými mestami (okrem Bratislavy a niektorých mestských štvrtí Košíc). Dĺžky hrán siete boli prevzaté z popisu slovenskej

When numerical experiments were performed, we found that the difference between the objective function value of the resulting solution of problem (7) – (11) and the obtained lower bound was too large. That is why we suggested an improvement of the above method making use of the "strengthening" constraint (4). This originally redundant constraint was inserted into the model (7) – (11). The improved algorithm of the subgradient method follows steps 0. – 4. again, but in step 1. solves problem (7) – (11),(4) instead of problem (7) – (11). The procedure described in section 3 was used to solve problem(7) – (11),(4).

6. Numerical experiments

Numerical experiments were focused on study of time consumption of the developed algorithms for the incapacitated and capacitated region-partitioning problem. Having considered the algorithm for the capacitated problem, the gap between objective function value of the obtained solution and lower bound were included in the study. In connection with the gap, an influence of the exchange heuristic was investigated.

Tab. 1

p	1	2	3	4	5	6
d [km]	137.3	78.7	59.9	51.9	47.6	44.3
t [s]	0	0	23	23	24	24
i	2	4	6	7	9	10

When the capacitated problem was solved and the results were examined, it was found that the model (7) – (11) does not cover all practical requirements concerning the shape of a subregion. It is commonly awaited that a formed subregion must be connected. It means that no dwelling place assigned to another subregion is allowed to lie on the shortest path connecting any dwelling place of a subregion to the associated subregion centre. Unfortunately, model (7) – (11) enables forming even a disconnected subregion. This disconnectedness was quantified for the purposes of our research.

Let us assume that a solution is determined by number p of subregions, sets S_k of dwelling places (S_k denotes k-th subregion) and by centres i_k of the subregions for $k = 1, \ldots, p$. Let us denote by $\underline{S}_k$ a subset of S_k, where $\underline{S}_k$ consists of the dwelling places, which a dwelling place of other subregion lies on their shortest paths to subregion centre i_k. For each $j \in \underline{S}_k$ symbol $h(j)$ denotes index of the first dwelling place from $S_k - \underline{S}_k$, which lies on the shortest path from j to i_k and which is followed by no dwelling place from $\underline{S}_k$ on this path.

The disconnectedness is measured by value of the following expression

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \sum_{j \in S_k} b_j\, d_{jh(j)}\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right).$$

To test behaviour of the algorithms for the cases, when solved problems have a large size, the experiments were performed with the road network of the entire Slovak Republic except surrounding Bratislava. The network contained 2,889 dwelling places. Two

Tab. 2

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
d [km]	137.3	76.1	59.0	51.5	46.2	41.9	38.6	35.3	33.0	30.9	28.9	27.3	26.0	24.8
t [s]	9	70	83	297	483	597	1662	347	461	561	473	400	505	444
i	2	4	6	7	9	10	14	8	10	13	11	9	12	11
p	15	16	17	18	19	20	30	35	40	45	50	55	60	65
d [km]	23.8	22.9	22.0	21.3	20.7	20.0	15.0	13.4	12.0	11.0	10.2	9.6	9.1	8.7
t [s]	618	512	411	480	465	576	477	436	430	449	447	436	440	434
i	14	12	10	14	13	17	15	15	14	18	17	15	18	17

cestnej siete [2]. V tabuľke 1 sú uvedené výsledky, získané riešením úloh s prvou množinou možných umiestnení pre $p = 1, 2, \ldots, 6$. V tabuľke symbol d označuje optimálnu hodnotu dostupnosti v kilometroch na obyvateľa, t označuje čas riešenia úlohy v sekundách a i uvádza, koľkokrát bola použitá procedúra *BBDual* v behu algoritmu.

V tabuľke 2 sú uvedené výsledky pre prípady, keď množina možných umiestnení pozostávala zo sedemdesiatich miest. Úloha bola riešená pre dve postupnosti požadovaných počtov umiestnení. Prvá postupnosť bola $p = 1, \ldots, 20$ a druhá $p = 30, 35, \ldots, 65$.

Čo sa týka numerických experimentov s heuristikami pre úlohu kapacitne obmedzeného rozkladu regiónu, tieto boli vykonané taktiež vo vyššie opísanej slovenskej cestnej sieti s 2889 obcami, ale bola použitá iba prvá množina možných umiestnení, tvorená krajskými mestami.

Bolo riešených päť prípadov kapacitne obmedzenej úlohy pre $q = 2.2$, 1.5, 1.1, 0.9 a 0.8 milióna obyvateľov na podregión. Výsledky sú uvedené v tabuľke 3, kde p označuje výsledný počet

different sets of possible locations were used in the tests. The first set included seven centres of the current counties (excluding Bratislava) and the second set was formed by seventy centres of the current districts (excluding Bratislava and some quarters of Košice). Lengths of the network edges were overtaken from the Slovak road network description [2]. In table 1, there are reported results obtained by solving the problems with the first set of possible locations for $p = 1, 2, \ldots, 6$. In the table, symbol d denotes the optimal value of accessibility in kilometres per inhabitant, t denotes the computational time in seconds associated with problem solving and i is number of *BBDual* calls during the run of algorithm.

In table 2, there are reported results associated with the instances, when set of possible locations consisted of 70 places. The problem was solved for two sequences of locations' required numbers. The first sequence consisted of $p = 1, \ldots, 20$ and the second of $p = 30, 35, \ldots, 65$.

Concerning the numerical experiments with heuristic for the capacitated region partitioning problem, they were performed also with the above described Slovak road network with 2,889 dwelling places, but only the first set of possible locations formed by the current county centres was used.

Tab. 3

	BC	BV	BCM	BCV	BC	BV	BCM	BCV	BC	BV	BCM	BCV
q [10^6]	2.2	2.2	2.2	2.2	1.5	1.5	1.5	1.5	1.1	1.1	1.1	1.1
p	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
d [km]	80.9	80.9	80.9	80.9	61.2	60.6	60.4	60.4	54.5	55.6	55.5	55.5
o [%]	5.2	5.2	2.2	2.2	4.1	2.8	0.8	0.8	3.1	5.7	3.5	3.4
n [%]	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	1.7	0.0	0.3	3.1	3.6
i	52	52	192	192	48	49	276	276	75	55	536	534
t [s]	39	884	194	248	72	597	477	562	491	1140	2045	2220
	BC	BV	BCM	BCV	BC	BV	BCM	BCV				
q [10^6]	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.8	0.8	0.8				
p	4	4	5	5	6	6	6	6				
d [km]	52.5	53.1	54.3	52.2	44.4	44.3	44.3	44.3				
o [%]	11.1	14.7	13.0	8.5	1.9	1.7	0.1	0.1				
n [%]	0.1	0.3	15.9	12.5	1.2	1.3	1.0	1.3				
i	157	60	711	693	66	60	10	10				
t [s]	208	800	1004	1163	35	2268	24	61				

podregiónov, d výslednú hodnotu dostupnosti v kilometroch a o uvádza dosiahnutú presnosť výsledného riešenia ako rozdiel medzi hodnotou účelovej funkcie výsledného riešenia a dolnou hranicou v percentách dolnej hranice. Nesúvislosť je označená ako n a je uvedená taktiež v percentách dolnej hranice. Parametre i a t majú ten istý význam ako v tabuľkách 1 a 2. Každý prípad bol riešený štyrmi modifikáciami heuristického algoritmu, aby bolo možné porovnať vplyv jednotlivých krokov na sledované parametre.

Modifikácie boli označené identifikátormi **BC**, **BV**, **BCM**, **BCV**. Modifikácia **BC** sa skladá zo subgradientovej metódy pre úlohu (7) – (11) a z Lagrangeovej heuristiky (bez výmennej fázy). Modifikácia **BV** pridáva výmennú fázu k algoritmu *BC*. Modifikácia **BCM** rieši Lagrangeovu relaxáciu úlohy (7) – (11), (4) namiesto (7) – (11), to značí, že je pri výpočte dolnej hranice použitá zosilňujúca podmienka. V tejto modifikácii nie je použitá výmenná fáza. Modifikácia **BCV** pridáva výmennú fázu k prístupu použitému v **BCM**.

7. Záver

Uvedené výsledky ukázali, že kapacitne neobmedzená úloha je riešiteľná v rozumnom čase, ale kapacitne obmedzená úloha predstavuje značný problém. Čo sa kapacitne obmedzenej úlohy týka, bolo zistené, že pridanie zosilňujúcej podmienky (4) k Lagrangeovej relaxácii (7) - (11) význačne zlepšuje tesnosť dolnej hranice. Avšak toto zlepšenie je zaplatené väčším výpočtovým časom. Výmenná fáza tiež prispieva k lepšiemu riešeniu, špeciálne keď nie je použitá zosilňujúca podmienka. Nanešťastie toto zlepšenie tak isto vyžaduje väčší výpočtový čas. Diskrétny proces zhromažďovania s dvoma triedami priorít.

Poďakovanie
Tento článok bol financovaný za podpory grantu VEGA 1/7211/20.

Five instances of the capacitated problem for $q = 2.2$, 1.5, 1.1, 0.9 and 0.8 million inhabitants per subregion were solved. The results are reported in table 3, where p denotes the resulting number of subregions; d is the resulting value of accessibility in kilometres and o reports on attained precision of resulting solution expressed as difference between objective function value of the resulting solution and the lower bound in percents of the lower bound. The disconnectedness is denoted as n and is reported in percents of the lower bound, too. Parameters i and t have the same meaning as in tables 1 and 2. Each instance of the problem was solved by four modifications of the heuristic algorithm to enable to compare influence of the particular steps on the studied parameters.

Identifiers **BC**, **BV**, **BCM**, **BCV**, denoted these modifications. Modification **BC** consists of subgradient method for problem (7) – (11) and of the Lagrangean heuristic (without the exchange phase). Modification **BV** adds the exchange phase to algorithm BC. Modification **BCM** solves Lagrangean relaxation of problem (7) – (11), (4) instead of (7) – (11); it means that the strengthening constraint is used when lower bound is computed. In this modification the exchange phase is not used. Modification **BCV** adds the exchange phase to the approach used with **BCM**.

7. Conclusion

The reported results showed that the incapacitated region-partitioning problem is solvable in reasonable computation time, but the capacitated problem constitutes a considerable difficulty. Concerning the capacitated region-partitioning problem, it was found that the addition of the strengthening constraint (4) to the Lagrangean relaxation of (7) - (11) considerably improves the tightness of the lower bound. However, this effect is paid by greater computation time. The exchange phase also contributes to the better solution, especially, when a strengthening constraint is not used. Unfortunately, this improvement also needs greater computation time.

Acknowledgement
This paper was supported by grant VEGA 1/7211/20.

Literatúra - References

[1] CENEK, P., JANÁČEK, J., JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ.: *Optimalizace státní správy a územněsprávní členění.* Scientific Papers of the University of Pardubice. Series D. Faculty of Economics and Administration 4 (1999). Universita Pardubice. pp 49-54

[2] CENEK, P., JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ.: *Model dopravnej obsluhy regiónu*. Horizonty dopravy. No. 1. 2000. pp. 10-12

[3] ERLENKOTTER, D.: *A Dual-Based Procedure for Uncapacitated Facility Location.* Operations Research. Vol. 26. No 6. November-December 1978. pp. 992-1009

[4] JANÁČEK, J., KOVAČIKOVÁ, J.: *Exact Solution Techniques for Large Location Problems.* In: Proceedings of the Mathematical Methods in Economics. Ostrava. Sept. 9-11.1997. pp 80-84