

Milan Sága *

PRÍSPEVOK K ANALÝZE NESTACIONÁRNEHO NÁHODNÉHO KMITANIA VOZIDIEL

CONTRIBUTION TO THE ANALYSIS OF NON-STATIONARY RANDOM VIBRATION OF VEHICLES

Cieľom príspevku je zahrnúť do „klasického“ štatistického riešenia kmitania vozidiel nestacionárne náhodné budenie. Ostatné parametre vozidla sú deterministické funkcie. Nestacionárna náhodná funkcia bude modelovaná premenlivou rýchlosťou vozidla a vertikálnou nerovnosťou trate. Budeme uvažovať evolučný gaussovský proces. Dynamika pohybu koľajového vozidla bude analyzovaná použitím Monte Carlo simulácie a teórie Markovových procesov.

Kľúčové slová: náhodné kmitanie, Monte Carlo simulácia, Markov proces nestacionárny náhodný proces, stochastická analýza, odozva strednej hodnoty, kovariančná odozva.

Úvod

Väčšina štúdií v oblasti stochastickej dynamiky je venovaná gaussovským stacionárnym budeniam, ale len málo náhodných procesov v inžinierskej praxi je reálne gaussovských a stacionárnych. Stochastické zaťaženia môžu byť interpretované nie len ako externé sily, ale aj ako externé kinematické efekty. Bolotin v [3] definoval náhodné zaťaženie nasledovne:

- zaťaženie od turbulencie atmosféry,
- akustické zaťaženie,
- zaťaženie od pulzácie v turbulentnej okrajovej vrstve,
- zaťaženie od tlaku morských vln,
- zaťaženie dopravných strojov od nerovnosti jazdnej dráhy a
- seizmické zaťaženie.

Na druhej strane, exaktné riešenia v lineárnych alebo nelineárnych analýzach náhodných vibrácií sú veľmi limitované a sú obyčajne založené na predpokladoch, že budenie je charakteru gaussovského bieleho šumu a konštrukcie môžu byť modelované ako systémy s jedným stupňom voľnosti. Je známe, že riešiť dynamické systémy s viacerými stupňami voľnosti je možné len numerickými postupmi.

V prípade stochastických systémov (najmä nelineárnych) sa stretávame s prístupmi ako sú: metóda tangenciálnej linearizácie (TLM) [13], metóda štatistickej linearizácie (SLM) v rôznych modifikáciách [1], [6], [8], [9], [11], [13], [15], [17], [18], metóda štatistickej kvadratizácie (SQM) [20], aplikácia Markovových procesov (MPT) [10], [16], [17], funkcionálna metóda Volterra a Wie-

The goal of the paper is to include non-stationary random vibration excitation into the “classic” statistical solution of vehicles. Other vehicle parameters are the deterministic functions. The non-stationary random function will be modelled by changeable speed of the vehicle and vertical unevenness of track. We shall assume evolutionary Gaussian process. The dynamics of railway vehicle motion will be analysed by the Monte Carlo simulation and the theory of Markov processes.

Key words: random vibration, Monte Carlo simulation, Markov process, non-stationary random process, stochastic analysis, mean response, covariance response.

Introduction

Most studies in the field of stochastic dynamics are devoted to Gaussian stationary excitations but only a few random processes in engineering practice are really Gaussian and stationary. Stochastic loadings will be interpreted not only as external forces, but also as external kinematics effects. Bolotin defined [3] random excitation as follows:

- loading due to atmospheric turbulence,
- acoustic loading,
- loading due to pulsation in a turbulent boundary layer,
- loading due to pressure of sea waves,
- loading of transport machines due to unevenness of track, and
- seismic loading.

On the other hand, the exact solutions in linear or non-linear random vibration analyses are very limited and they are usually based on the assumptions that the excitation is Gaussian white noise and the structures can be modelled as single degree-of-freedom systems. It is well known that to solve the multi degree-of-freedom dynamics systems is possible only numerical approaches.

In the case of stochastic systems (especially non-linear) we encounter the approaches, such as: tangent linearization method (TLM) [13], statistical linearization method (SLM) in various modifications [1], [6], [8], [9], [11], [13], [15], [17], [18], statistical quadratization method (SQM) [20], the Markov process approach (MPT) [10], [16], [17], functional method of Volterra and

* Milan Sága

Department of Mechanics and Strength, Faculty of Mechanical Engineering, University of Žilina, Veľký diel, SK-01026 Žilina, Slovak Republic
E-mail: saga@fstroj.utc.sk

nera (FMVW) [13], asymptotická metóda Krylova – Bogoljubova – Mitropolského (ASM) [6], perturbačná metóda (PM) a jej modifikácie [4], [6], [11], [17].

Vďaka výpočtovej technike je simulačná metóda Monte Carlo veľmi populárna a často aplikovaná [6], [7], [19], [21]. Hoci táto metóda je jednoduchá a nemá obmedzenia, je všeobecne časovo náročná a drahá. Z pohľadu týchto ťažkostí, aproximačné metódy, vrátane PM, TLM, SLM, SQM, MPT môžu byť výhodné. Niektorí autori hľadajú nové prístupy riešenia kombináciou Monte Carlo metódy s inými metódami [7].

Matematický model

Na vytvorenie matematického modelu systému pre dynamickú analýzu je potrebné idealizovať inerčné, tlmiace a tuhostné vlastnosti diskretnými alebo spojitými prvkami (konečné prvky). Obvyčajne prvý krok je vytvoriť fyzikálny model, ktorý môže byť súhrnom diskretných prvkov ako sú hmota, pružina, tlmič alebo prvkov kontinua ako pruhy, nosníky, škrupiny a objemy alebo kombináciou diskretných a spojitých elementov. Aplikácia základných princípov mechaniky dá sústavu všeobecne nelineárnych diferenciálnych rovníc

$$\dot{x}(t) + A(x, t) \cdot x(t) = f(t), \quad (1)$$

kde $x(t)$ je vektor odozvy zodpovedajúci náhodnému vektoru budenia $f(t)$, $A(x, t)$ je reálna alebo komplexná matica sústavy rozmeru $n \times n$. $A(x, t)$ môže byť lineárna alebo nelineárna, závislá od charakteru problému. Mnoho mechanických modelov je lineárnych vďaka ich analytickej jednoduchosti a faktu, že dávajú reálne výsledky pre veľkú triedu problémov.

Avšak existuje množstvo úloh, pre ktoré lineárne modely nedávajú akceptovateľné výsledky, takže je nevyhnutné vytvárať nelineárne modely. To znamená, ak $A(x, t)$ je nelineárna, môžeme aplikovať známe aproximačné metódy (PM, TLM, SLM, SQM). Použitím linearizačných techník dostaneme štatisticky ekvivalentnú maticu systému A .

Táto štúdia prezentuje dva prístupy na stanovenie odozvy systému modelovaného rovnicou (1):

1. pomocou teórie Markovových procesov a
2. Monte Carlo simuláciou.

Riešenie pomocou teórie Markovových procesov

Formulácia Markovového procesu vyžaduje idealizáciu, že budenie je nezávislé od dvoch časových okamžikov bez ohľadu ako blízko sa nachádzajú (delta korelácia) [17]. Tento predpoklad [17], [4], ktorý je jasne fyzikálne nerealizovateľný, vedie k takým modelom, ktoré majú charakter bieleho šumu a procesy získané lineárnym filtrovaním bieleho šumu.

Uvažujme systém diferenciálnych rovníc prvého rádu (1) s počiatočnými podmienkami $x(0) = 0$ a silovým budením $f(t) = y(t) \cdot p(t)$. Sila $f(t)$ je vektor modulovaného evolučného procesu

Wiener (FMVW) [13], asymptotic method of Krylov – Bogoljubov – Mitropolsky (ASM) [6], perturbation method (PM) and its modifications [4], [6], [11], [17].

Thanks to computer techniques, Monte Carlo simulation method (MCS) is very popular and frequently applied [6], [7], [19], [21]. Although this method is straightforward and does not have such limitations, is generally time-consuming and costly. In view of these difficulties, approximate methods, including PM, TLM, SLM, SQM can be advantageous. Some authors look for the new approaches of the solution by combining the Monte Carlo method with other methods [7].

Mathematical model

To construct a mathematical model of a system for dynamic analysis, it is necessary to idealize the inertia, damping and stiffness properties by discrete or continuous elements. Usually the first step is to construct a physical model that may be an assemblage of discrete elements such as mass, springs and dashpots, continuous elements such as bars, beams, shells and volumes, or a combination of both discrete and continuous elements. The application of the fundamental laws of mechanics yields a set of generally non-linear differential equations

$$\dot{x}(t) + A(x, t) \cdot x(t) = f(t), \quad (1)$$

where $x(t)$ is the response vector corresponding to the random excitation vector $f(t)$, $A(x, t)$ is the real or complex structural matrix of order $n \times n$. $A(x, t)$ may be linear or non-linear, depending on the nature of the problem. Many mechanical models are linear thanks to their analytical simplicity and the fact that they yield realistic results for large class problems.

There are, however, a number of problems for which linear models do not yield acceptable results, so that it becomes necessary to construct non-linear models. It means, if $A(x, t)$ is non-linear, we can apply well-known approximate methods (PM, TLM, SLM or SQM). Using linearization techniques we get the statistically equivalent structural matrix A .

This study presents two approaches in determining the response of a system modelled by equation (1):

1. by the Markov processes theory; and
2. Monte Carlo simulation.

Solution by Markov process theory

The Markov process formulation requires the idealization that the excitation is independent at two instants of time regardless of how close they are (delta correlation) [17]. This assumption [17], [4], which is clearly physically unrealisable, leads to such models as white noise and processes obtained by linearly filtering white noise.

Let us consider the system of first-order differential equations (1) with initial conditions $x(0) = 0$ and force excitation $f(t) = y(t) \cdot p(t)$. The force $f(t)$ is a modulated evolutionary process

s deterministickou vektorovou funkciou $y(t)$ a stacionárnym náhodným procesom $p(t)$ s nulovou strednou hodnotou.

Odozva strednej hodnoty $x(t)$ je [17]:

$$\dot{E}[x] + A \cdot E[x] = E[f], \quad (2)$$

kde $E[\dots]$ je operátor strednej hodnoty a kovariančná odozva $x(t)$ je

$$\dot{K}(t) + A \cdot K(t) + (A \cdot K(t))^T = b \cdot y^T + y \cdot b^T, \quad (3)$$

kde $K(t)$ je kovariančná matica,

$$K(t) = E[x \cdot x^T] \text{ a } K(0) = 0$$

a

$$b(t) = h(t) \cdot \int_0^t h^{-1}(u) \cdot y(u) \cdot E[p(u) \cdot p(t)] \cdot du.$$

Rovnice (2) a (3) určujú, že vektor stredných hodnôt a kovariančná matica sú funkciami času. Matica $h(t)$ je tzv. matica fundamentálneho riešenia alebo matica impulznej odozvy. Ak sa predpokladá, že $p(t)$ má charakter bieleho šumu s $E[p(t_1) \cdot p(t_2)] = 2 \cdot \pi \cdot \Phi_0 \cdot \delta(t_2 - t_1)$, potom rovnica (3) môže byť určená:

$$\dot{K}(t) + A \cdot K(t) + (A \cdot K(t))^T = 2 \cdot \pi \cdot \Phi_0 \cdot y(t) \cdot y^T(t), \quad (4)$$

kde Φ_0 je výkonová spektrálna hustota funkcie $p(t)$. Pripustné riešenie rovnice (4) je možné urobiť pomocou špeciálneho numerického postupu.

Uvažujme Crank - Nicolsonovu integračnú metódu. Diskrétna časová derivácia je daná vzťahom

$$\dot{K}(t) = \frac{2}{\Delta} \cdot [K(t) - K(t - \Delta)] - \dot{K}(t - \Delta), \quad (5)$$

kde Δ je časový krok integračnej metódy. Použitím rovníc (5) a (4) môžeme písať

$$\left(\frac{2}{\Delta} \cdot I + A \right) \cdot K(t) + [A \cdot K(t)]^T = 2 \cdot \pi \cdot \Phi_0 \cdot y(t) \cdot y^T(t) + \frac{2}{\Delta} \cdot K(t - \Delta) + \dot{K}(t - \Delta), \quad (6)$$

kde I je jednotková matica. Rovnica (6) je tzv. Ljapunova rovnica vo všeobecnom tvare. V každom kroku je potrebné použiť špeciálny numerický algoritmus vytvorený v MATLAB-e.

Riešenie pomocou Monte Carlo simulácie

Alternatívnou možnosťou predošlého prístupu je použiť Monte Carlo metódu. S využitím súčasných výpočtových možností sa stáva táto metóda oveľa viac atraktívnou.

Výsledky sú určované zo série numerických analýz rovnice (1) (približne 100 - 1000 realizácií náhodného budenia). Je odporúčané generovať asi 5000 náhodných hodnôt budiacej funkcie (definovanej výkonovou spektrálnou hustotou $S_{ff}(\omega)$) pre každú realizáciu. Simulácia vstupného nestacionárneho evolučného gausovského centrovaneho procesu $f(t)$ môže byť formulovaná:

vector with a deterministic vector function $y(t)$ and stationary random process $p(t)$ with zero mean.

The mean response of $x(t)$ [17] is

$$\dot{E}[x] + A \cdot E[x] = E[f], \quad (2)$$

where $E[\dots]$ is the mean value operator and the covariance response of $x(t)$ is

$$\dot{K}(t) + A \cdot K(t) + (A \cdot K(t))^T = b \cdot y^T + y \cdot b^T, \quad (3)$$

where $K(t)$ is the covariance matrix,

$$K(t) = E[x \cdot x^T] \text{ and } K(0) = 0$$

and

$$b(t) = h(t) \cdot \int_0^t h^{-1}(u) \cdot y(u) \cdot E[p(u) \cdot p(t)] \cdot du.$$

Equations (2) and (3) imply that mean vector and covariance matrix are the time functions. Matrix $h(t)$ is so-called the fundamental solution matrix or impulse response matrix. If it is assumed that $p(t)$ is white noise with $E[p(t_1) \cdot p(t_2)] = 2 \cdot \pi \cdot \Phi_0 \cdot \delta(t_2 - t_1)$, then the equation (3) can be expressed as

$$\dot{K}(t) + A \cdot K(t) + (A \cdot K(t))^T = 2 \cdot \pi \cdot \Phi_0 \cdot y(t) \cdot y^T(t), \quad (4)$$

where Φ_0 is the power spectral density of $p(t)$. The acceptable solution of the equation (4) is possible to make by special numerical approach.

Let us consider Crank - Nicolson integration method. The discrete time derivation is given by

$$\dot{K}(t) = \frac{2}{\Delta} \cdot [K(t) - K(t - \Delta)] - \dot{K}(t - \Delta), \quad (5)$$

where Δ is the time step of the integration method. Using the equations (5) and (4) we can write

where I is the identity matrix. The equation (6) is so-called Lyapunov equation in general form. In each time step is necessary to use the special numerical algorithm created in MATLAB.

Solution by Monte Carlo simulation

The alternative avenue of the previous approach is to use the Monte Carlo method. With the advent of recent computational facilities, this method becomes ever more attractive.

The results are determined from the series of numerical analyses of equation (1) (approximately 100 - 1000 realisations of random excitation). It is recommended to generate about 5000 random values of excitation function (defined by power spectral density $S_{ff}(\omega)$) for each realisation. Simulation of input non-stationary evolutionary Gaussian process $f(t)$ with zero mean can be formulated by

$$f(t) = c(t) \cdot y(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^N \sqrt{S_{cc}(\omega_k) \cdot \Delta\omega} \cdot \cos(\omega_k \cdot t - \varphi_k) \cdot y(t), \quad (7)$$

kde φ_k je náhodné číslo s rovnomerným rozložením ($0 \leq \varphi_k \leq 2 \cdot \pi$), $y(t)$ je určujúca modulačná časová funkcia, $c(t)$ je centrovateľný stacionárny proces s výkonovou spektrálnou hustotou $S_{cc}(\omega)$. Ak je $S_{cc}(\omega)$ konštantná, tak $c(t)$ má charakter bieleho šumu. Výkonová spektrálna hustota vstupného zaťaženia $f(t)$ je $S_{ff}(\omega, t) = y^2(t) \cdot S_{cc}(\omega)$.

Štatistická analýza kmitania koľajového vozidla

Pohyb vozidiel na železničnej trati spôsobuje vibrácie. Pretože profil trate je náhodnou funkciou priestorových súradníc, tieto vibrácie sú tiež náhodné. Budeme predpokladať, že pohyb vozidla v horizontálnom smere je nerovnomerný (premenlivá rýchlosť, hoci dôležitejšou nestacionaritou môže byť premenlivá akosť trate).

Použitím uvedenej teórie budeme riešiť odozvu jednoduchého modelu vozidla (obr. 1) spôsobenú nestacionárnym náhodným buđením. Určíme prvé a druhé štatistické momenty (t. j. vektor stredných hodnôt a kovariančnú maticu) odozvy mechanického modelu na obr.1.

Štrukturálne parametre sú:

- hmotnosť podvozku	$m_1 = 3000$	kg
- hmotnosť skrine vagóna	$m_2 = 13000$	kg
- konštanta tlmenia vo zvislom smere	$b_1 = 120000$	Nsm ⁻¹
- konštanta tlmenia vo zvislom smere	$b_2 = 100000$	Nsm ⁻¹
- zvislá tuhosť	$k_1 = 3000000$	Nm ⁻¹
- zvislá tuhosť	$k_2 = 1500000$	Nm ⁻¹

Uvažujme aproximáciu výkonovej spektrálnej hustoty vertikálnej nerovnosti $u(t)$ trate podľa ORE B 176 [12] v tvare

$$S_{uu}(\lambda) = \frac{A \cdot b^2}{(\lambda^2 + a^2) \cdot (\lambda^2 + b^2)}, \quad (8)$$

kde $a = 0,0206$, $b = 0,8246$, $A = 4,032 \cdot 10^{-7}$ pre dobrú trať a $A = 1,08 \cdot 10^{-8}$ pre zlú trať. λ je dĺžková frekvencia.

Ak rýchlosť vozidla je funkciou času $v = v(t)$ a

$$\lambda = \frac{\omega}{v}, \quad (9)$$

potom

$$S_{uu}(\omega, t) = \frac{1}{v(t)} \cdot \frac{A \cdot b^2}{\left[\frac{\omega^2}{v^2(t)} + a^2 \right] \cdot \left[\frac{\omega^2}{v^2(t)} + b^2 \right]}, \quad (10)$$

kde ω je kruhová frekvencia.

Ak aplikujeme teóriu Markovových procesov, budeme potrebovať použiť predpoklad evolučného náhodného buđenja s deter-

where φ_k is uniformly distributed random number ($0 \leq \varphi_k \leq 2 \cdot \pi$), $y(t)$ is a deterministically modulating time function, $c(t)$ is zero mean stationary process with power spectral density $S_{cc}(\omega)$. If $S_{cc}(\omega)$ is constant $c(t)$ is white noise. The evolutionary power spectral density of input loading $f(t)$ is $S_{ff}(\omega, t) = y^2(t) \cdot S_{cc}(\omega)$.

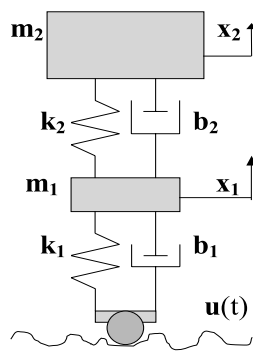
Statistical analysis of railway vehicle vibration

A vehicle moving on railway track causes vibrations. Since the profile of a track is a random function of the spatial coordinates, these vibrations are also random. We shall assume that the motion of the vehicle in the horizontal direction is non-uniform (changeable speed, although more important non-stationarity can be the changeable track quality).

Using previous theory we shall solve the response of the simple vehicle model (Fig. 1) under non-stationary random excitation. Let us determine the first and second statistical moments (i.e. the mean vector and the covariance matrix) of the response of the mechanical model on Fig. 1.

The structural parameters are:

- mass of bogie	$m_1 = 3000$	kg
- mass of body of coach	$m_2 = 13000$	kg
- damping coefficient in vertical direction	$b_1 = 120000$	Nsm ⁻¹
- damping coefficient in vertical direction	$b_2 = 100000$	Nsm ⁻¹
- vertical stiffness	$k_1 = 3000000$	Nm ⁻¹
- vertical stiffness	$k_2 = 1500000$	Nm ⁻¹



Obr. 1. Dynamický model vozidla
Fig. 1. Dynamic model of vehicle

Let us consider the approximation of the power spectral density of vertical unevenness $u(t)$ of track in due order ORE B 176 [12] in the form

$$S_{uu}(\lambda) = \frac{A \cdot b^2}{(\lambda^2 + a^2) \cdot (\lambda^2 + b^2)}, \quad (8)$$

where $a = 0,0206$, $b = 0,8246$, $A = 4,032 \cdot 10^{-7}$ for a good track and $A = 1,08 \cdot 10^{-8}$ for a bad track. λ is the length frequency.

If the vehicle speed is time function $v = v(t)$ and

$$\lambda = \frac{\omega}{v}, \quad (9)$$

then

$$S_{uu}(\omega, t) = \frac{1}{v(t)} \cdot \frac{A \cdot b^2}{\left[\frac{\omega^2}{v^2(t)} + a^2 \right] \cdot \left[\frac{\omega^2}{v^2(t)} + b^2 \right]}, \quad (10)$$

where ω is the circular frequency.

Applying the Markov process theory we shall need to use the assumption of an evolutionary random excitation with a determi-

ministicou modulačnou funkciou a náhodným procesom s charakterom bieleho šumu. Preto je potrebné definovať parametre filtra budiacej funkcie. Bežne používaným filtrom pri modelovaní zemetrasenia je Kanai - Tajimiov filter určený nasledujúcou diferenciálnou rovnicou

$$m_e \cdot \ddot{u} + b_e \cdot \dot{u} + k_e \cdot u = w(t), \quad (11)$$

kde $w(t)$ je známy Gaussovský proces s charakterom bieleho šumu s konštantnou výkonovou spektrálnou hustotou S_0 . Frekvenčná odozva filtra môže byť vyjadrená vzťahom

$$H(\omega) = \frac{1}{k_e - \omega^2 \cdot m_e + i \cdot \omega \cdot b_e}. \quad (12)$$

Porovnaním výkonovej spektrálnej hustoty funkcie $u(t)$ z (11) a (10) dostaneme:

$$\frac{S_0}{(k_e - \omega^2 \cdot m_e) + b_e^2 \cdot \omega^2} = \frac{1}{v} \cdot \frac{A \cdot b^2}{\left[\frac{\omega^2}{v^2} + a^2 \right] \cdot \left[\frac{\omega^2}{v^2} + b^2 \right]} \quad (13)$$

Z rovnice (13) je jasné že:

$$S_0 = A \cdot b^2, \quad m_e = \frac{1}{\sqrt{v^3}}, \quad b_e = \frac{(a+b)^2}{v}, \quad k_e = a \cdot b \cdot \sqrt{v}. \quad (14)$$

Zostrojme pohybové rovnice:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_1 + b_2) & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

Zlúčením rovníc (11) a (15) môžu byť pohybové rovnice vyjadrené nasledovne

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{v^3(t)}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_1 + b_2) & -b_2 & -b_1 \\ -b_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(a+b)^2}{v(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & a \cdot b \cdot \sqrt{v(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w(t) \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

Vytvorme 2-dimenzionálny Markovov vektor [17] pomocou substitúcie:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = u, \quad y_4 = \dot{x}_1, \quad y_5 = \dot{x}_2, \quad y_6 = \dot{u}$$

potom výsledné rovnice sú:

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right) & \frac{k_2}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\left(\frac{b_1 + b_2}{m_1}\right) & \frac{b_2}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & -a \cdot b \cdot \sqrt{v(t)} & 0 & 0 & -(a \cdot b)^2 \cdot \sqrt{v(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{v^3(t)} \end{Bmatrix} w(t) \quad (17)$$

alebo

$$\dot{y}(t) = A(t) \cdot y(t) + b(t) \cdot w(t). \quad (18)$$

nistic modulated function and white noise process. Therefore, it is necessary to define the filter parameters of the excitation function. A commonly used filter in modelling of the earthquake ground motion is the Kanai-Tajimi filter governed by the following differential equation

$$m_e \cdot \ddot{u} + b_e \cdot \dot{u} + k_e \cdot u = w(t), \quad (11)$$

where $w(t)$ is well-known Gaussian white noise process with constant power spectral density S_0 . The frequency response function of the filter can be expressed as

$$H(\omega) = \frac{1}{k_e - \omega^2 \cdot m_e + i \cdot \omega \cdot b_e}. \quad (12)$$

Comparing the power spectral density of $u(t)$ from (11) and (10) we get

From (13) it is clear that

$$S_0 = A \cdot b^2, \quad m_e = \frac{1}{\sqrt{v^3}}, \quad b_e = \frac{(a+b)^2}{v}, \quad k_e = a \cdot b \cdot \sqrt{v}. \quad (14)$$

Let us construct the equations of motion

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_1 + b_2) & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

Combining (11) and (15) the equations of motion can be expressed as

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{v^3(t)}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_1 + b_2) & -b_2 & -b_1 \\ -b_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(a+b)^2}{v(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & a \cdot b \cdot \sqrt{v(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w(t) \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

Let us constitute the 2-dimensional Markov vector by substitute:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = u, \quad y_4 = \dot{x}_1, \quad y_5 = \dot{x}_2, \quad y_6 = \dot{u}$$

then the final equations are given by

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right) & \frac{k_2}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\left(\frac{b_1 + b_2}{m_1}\right) & \frac{b_2}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & -a \cdot b \cdot \sqrt{v(t)} & 0 & 0 & -(a \cdot b)^2 \cdot \sqrt{v(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{v^3(t)} \end{Bmatrix} w(t) \quad (17)$$

or

$$\dot{y}(t) = A(t) \cdot y(t) + b(t) \cdot w(t). \quad (18)$$

Ak uvažujeme $E(y) = 0$, použitím rovnice (4) dostaneme kovariančnú odozvu v nasledovnom tvare

$$\dot{E}[y \cdot y^T] + A \cdot E[y \cdot y^T] + (A \cdot E[y \cdot y^T])^T = 2 \cdot \pi \cdot S_0 \cdot b(t) \cdot b^T(t). \quad (19)$$

Numerické riešenie môže byť realizované pomocou rovnice (6).

Ak

$$v(t) = \frac{100}{3,6} \cdot \left[1 + 0,4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{T}\right) \right],$$

potom časová modulačná funkcie je

$$b^T(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\left(\frac{100}{3,6} \cdot \left[1 + 0,4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{T}\right) \right]\right)^3} \end{bmatrix},$$

kde $T (=120 [s])$ je doba simulácie. Známkou akosti chodu W_z môže byť vyjadrená ako

$$W_z = 3,17 \cdot [E(\ddot{x}_2^2)]^{0,15}. \quad (20)$$

Výsledky riešenia rovníc (18 a (19) sú ukázané v grafickej forme na obrázkoch 2 – 7. Porovnáваме smerodajnú odchýlku vertikálnych posunutí, rýchlostí a zrýchlení hmotných bodov 1 a 2 pre parameter kvality trate $A = 4,032 \cdot 10^{-7}$ (dobrá trať) a $A = 1,08 \cdot 10^{-8}$ (zlá trať). Obrázok 8 ukazuje priebeh známky akosti chodu W_z hmotného bodu m_2 .

Considering $E(y) = 0$ we obtain the covariance response by using (4) as follows

The numerical solution can be realised by (6).

If

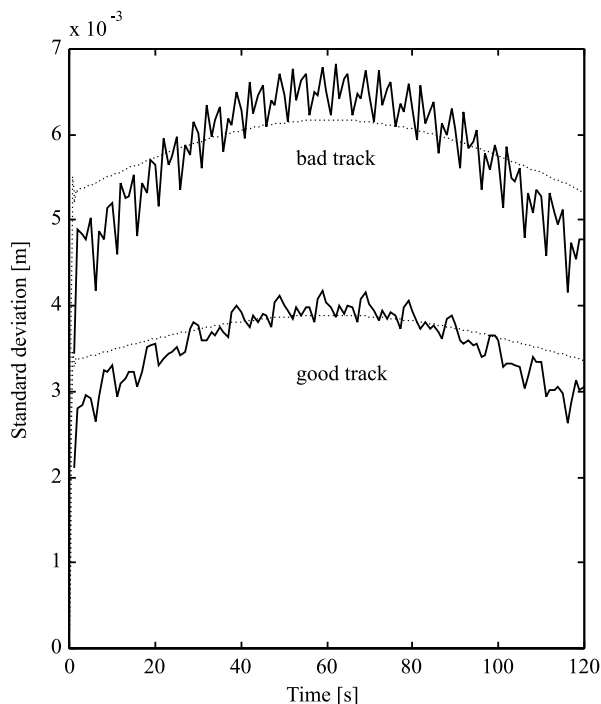
$$v(t) = \frac{100}{3,6} \cdot \left[1 + 0,4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{T}\right) \right],$$

then the time modulation function is

where $T (=120 [s])$ is duration of the simulation. The mark of ride quality W_z can be expressed as

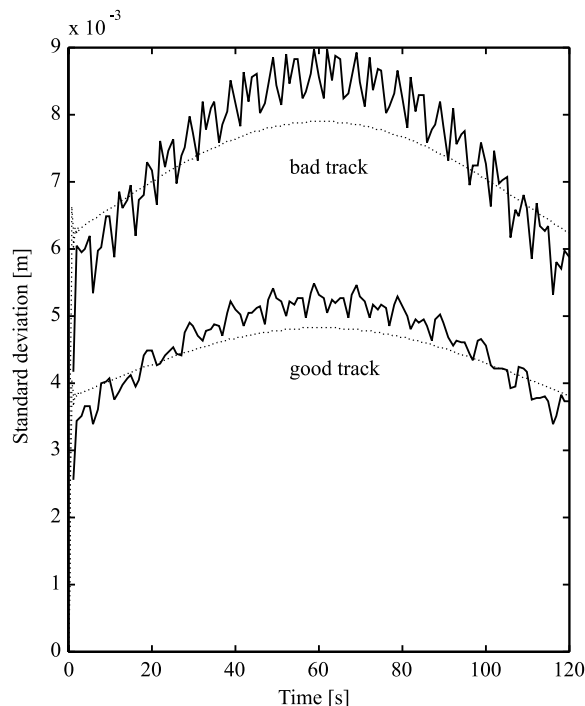
$$W_z = 3,17 \cdot [E(\ddot{x}_2^2)]^{0,15}. \quad (20)$$

The results of the solution of equations (18) and (19) are shown in graphic form on Figs. 2 – 7. We compare the standard deviation of vertical displacements, velocities, and accelerations of mass bodies 1 and 2 for the track quality parameter $A = 4,032 \cdot 10^{-7}$ (good track) and $A = 1,08 \cdot 10^{-8}$ (bad track). Figure 8 shows the behaviour of the mark of ride quality W_z of mass body m_2 .



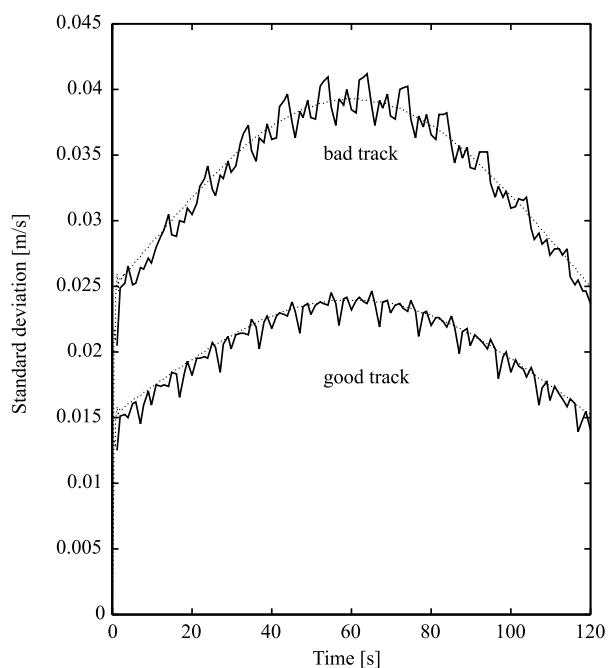
Obr. 2. Časový priebeh smerodajnej odchýlky posunutia x_1
Fig. 2. Time behaviour of the standard deviation of displacement x_1

— Monte Carlo simulation
..... Markov process theory



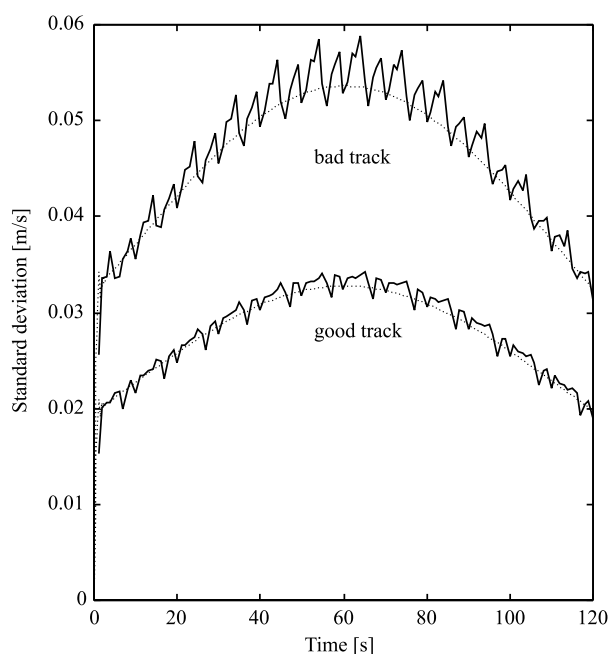
Obr. 3. Časový priebeh smerodajnej odchýlky posunutia x_2
Fig. 3. Time behaviour of the standard deviation of displacement x_2

— Monte Carlo simulation
..... Markov process theory



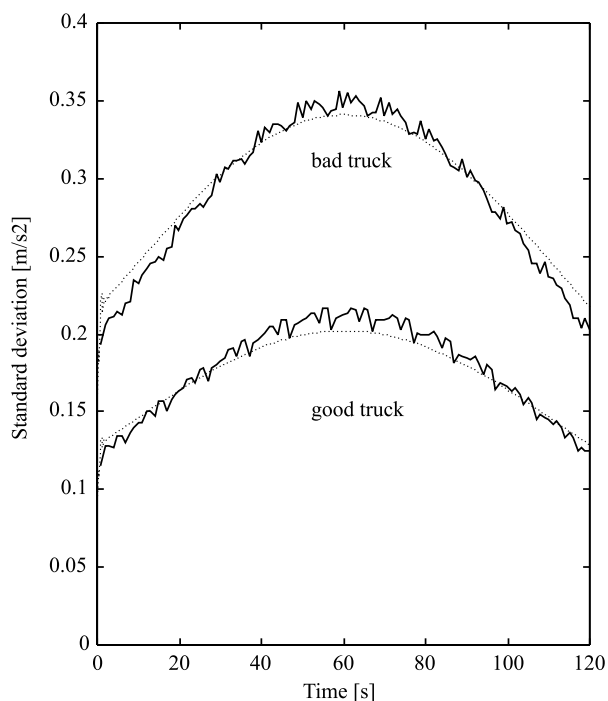
Obr. 4. Časový priebeh smerodajnej odchyľky rýchlosti dx_1/dt
Fig. 4. Time behaviour of the standard deviation of velocity dx_1/dt

— Monte Carlo simulation
..... Markov process theory



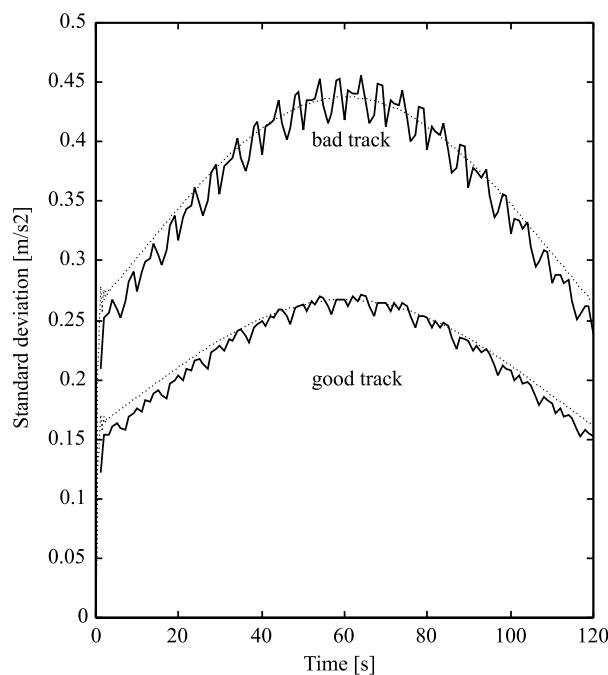
Obr. 5. Časový priebeh smerodajnej odchyľky rýchlosti dx_2/dt
Fig. 5. Time behaviour of the standard deviation of velocity dx_2/dt

— Monte Carlo simulation
..... Markov process theory



Obr. 6. Časový priebeh smerodajnej odchyľky zrýchlenia d^2x_1/dt^2
Fig. 6. Time behaviour of the standard deviation of acceleration d^2x_1/dt^2

— Monte Carlo simulation
..... Markov process theory



Obr. 7. Časový priebeh smerodajnej odchyľky zrýchlenia d^2x_2/dt^2
Fig. 7. Time behaviour of the standard deviation of acceleration d^2x_2/dt^2

— Monte Carlo simulation
..... Markov process theory

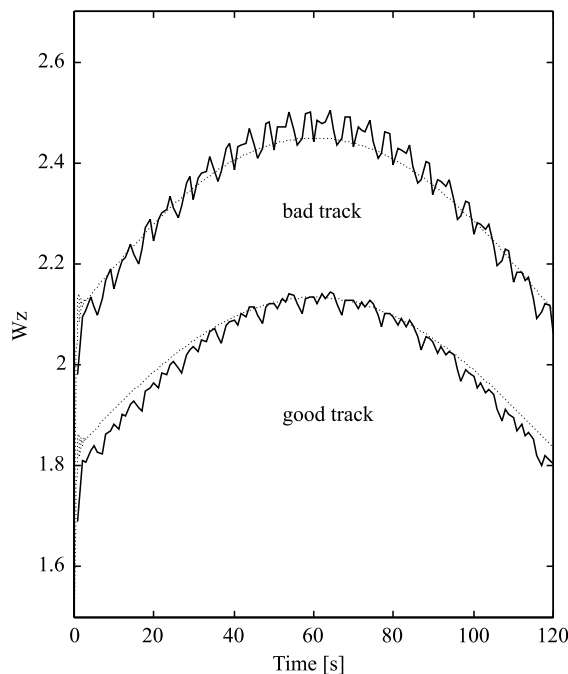
Záver

V tejto štúdii je popis nestacionárneho kmitania rozšírený na dynamiku vozidiel použitím teórie Markovových procesov a „klasického“ Monte Carlo prístupu, ktoré eliminujú tradičné obmedzenie konštantnej rýchlosti (alebo akosti trate) počas doby kmitania.

Zvlášť po sérii numerických analýz (Monte Carlo simulácia), prezentovaný prístup používajúci Markovov vektor je veľmi efektívny a rýchly vzhľadom na výpočtový čas (približne 50-krát rýchlejší).

Monte Carlo simulácia je prezentovaná kvôli kontrole správnosti výsledkov, ktoré ukazujú celkom dobrú zhodu.

Na záver by bolo vhodné zdôrazniť, že tieto štatistické odozvy sú veľmi užitočné pri odhade spoľahlivosti konštrukcii vozidiel.



Obr. 8. Časový priebeh známky akosti chodu skrine vagóna
Fig. 8. Time behaviour of the mark of ride quality of body of coach
— Monte Carlo simulation
..... Markov process theory

Conclusion

In this study, a non-stationary vibration description is extended to the dynamic analyses of vehicles by using the Markov process theory and “classic” Monte Carlo approach, which eliminate the traditional restriction of constant speed (or the track quality) during the period oscillation.

Particularly, after a series of numerical analyses (Monte Carlo method), the presented Markov vector approach is very effective and rapid with respect to the computational time (approximately fifty times more rapid).

The Monte Carlo simulation is presented to check the accuracy of the results, which show a fairly good comparison.

Finally, it should be emphasized that these statistically responses are very useful for estimating the reliability of the vehicles structures.

Literatúra - References

- [1] BENDAT, J., S.: *Nonlinear system analysis and identification from random data*, John Wiley & Sons, New York 1990
- [2] BILÝ, M.: *Simulácia náhodných procesov na základe hustoty pravdepodobnosti*, seminár Náhodné procesy a identifikácia mechanických dynamických systémov, Poprad 1989, (96-116)
- [3] BOLOTIN, V., V.: *Slučajnyje kolebania uprugich sistem*, Nauka, Moskva 1979
- [4] BREPTA, R. - PUST, L. - TUREK, F.: *Mechanické kmitání*, Sobotáles, Praha 1994
- [5] ČAČKO, J.: *Modelovanie náhodných procesov na základe korelačnej teórie*, seminár Náhodné procesy a identifikácia mechanických dynamických systémov, Poprad 1989, (117-148)
- [6] DOBIÁŠ, I.: *Nelineární dynamické soustavy s náhodnými vstupmi*, ACADEMIA, Praha 1988
- [7] ELISHAKOFF, I. - COLOMBI, P.: *Successful combination of the stochastic linearization and Monte Carlo methods*, Journal of Sound and Vibration, 160(3), 1993, (554-558)
- [8] GRUNDMANN, H. - WAUBKE, H.: *Non-linear stochastic dynamics of systems with random properties: A spectral approach combined with statistical linearization*, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 31, No. 5, 1996, (619-630)
- [9] CHERNG, R., H. - WEN, Y., K.: *Stochastic finite element analysis of non-linear plane trusses*, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 26, No. 6, 1991, (835-849)
- [10] IYENGAR R., N.: *Stochastic response and stability of the Duffing oscillator under narrowband excitation*, Journal of Sound and Vibration, 126(2), 1988, (255-263)
- [11] JULIŠ, K. - BREPTA, R. a kol.: *Mechanika II, Dynamika*, SNTL, Praha 1987
- [12] KALINČÁK, D. - KRŠKO, J.: *Hodnotenie zrýchlení dvojkolesí pri jazde po reálnej trati*, Súčasné problémy v koľajových vozidlách - PRORAIL '99, Žilina, október 1999, (201-208)
- [13] KROPÁČ, O.: *Náhodné jevy v mechanických soustavách*, SNTL, Praha 1987
- [14] KROPÁČ, O.: *Statistická dynamika mechanických soustav*, seminár Náhodné procesy a identifikácia mechanických dynamických systémov, Poprad 1989, (16-55)
- [15] LÁBAJ, J., KALINČÁK, D., KUKUČA, P., GAJDOŠ, J., GERLICI, J., LACK, T.: *Výpočtové metody v dopravnej a manipulačnej technike*, EDIS ŽU, Žilina, 1997.

- [16] NAES, A. – MOE, V.: *Stationary and non-stationary random vibration of oscillators with bilinear hysteresis*, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 31, No. 5, 1996, (553-562)
- [17] NIGAM, N., C.: *Introduction to Random Vibrations*, MIT Press, Cambridge 1983
- [18] ROBERTS, J., B. – SPANOS, P., D.: *Random Vibrations and Statistical Linearization*, John Wiley & Sons, New York 1990
- [19] RUBINSTEIN, R., Y.: *Simulation and the Monte Carlo Method*, John Wiley & Sons, New York 1981
- [20] SPANOS, P., D. – DONLEY, M., G.: *Nonlinear multi-degree-of-freedom system random vibration by equivalent statistical quadratization*, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 27, No. 5, 1992, (735-748)
- [21] VAVRO J., TVARŮŽEK J., HUSÁR Š.: *Experimental Load Measuring for Determining of Durability of Chassis Parts of Microcar Vehicle*, in "Proceedings of the XIII. Imecko World Congress", Torino, 1994